Потенциал электростатического поля

В.МОЖАЕВ

Силовой характеристикой электрического поля является вектор напряженности $\vec{E}$ электрического поля. Напряженность равна отношению силы, с которой поле действует на пробный точечный заряд, к величине этого заряда. Как видно из определения, напряженность поля не зависит от величины пробного заряда (лишь бы он не изменял исследуемое поле) и поэтому является характеристикой именно поля.

Помимо силовой характеристики поля $\vec{E}$ вводят еще энергетическую характеристику – потенциал поля φ. В отличие от напряженности, потенциал является скалярной величиной и равен отношению потенциальной энергии взаимодействия пробного точечного заряда с полем к величине этого заряда. Потенциальная энергия заряда, помещенного во внешнее электрическое поле, численно равна работе, которую необходимо совершить, чтобы переместить этот заряд от выбранного нулевого уровня в данную точку поля. Значение потенциальной энергии, а следовательно и потенциала в данной точке, зависит от выбора нулевого уровня отсчета. Физический смысл имеет не сам потенциал в точке, а его изменение в пространстве (разность потенциалов), которое не зависит от выбора нулевого уровня.

На практике электростатическое поле можно охарактеризовать только одной функцией – например, электростатическим потенциалом, поскольку напряженность электростатического поля однозначно связана с потенциалом. Так, в случае сферически симметричного поля, когда напряженность поля зависит только от расстояния r, эта связь имеет вид

$$E_r = -\frac{d\varphi}{dr},$$

где производная $\frac{d\varphi}{dr}$ выражает быстроту приращения потенциала в данном направлении. Аналогичные соотношения можно записать для проекций вектора напряженности в декартовой системе координат:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},\ E_y = -\frac{d\varphi}{dy},\ E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$$

(при дифференцировании по одной координате две остальные надо считать постоянными).

Теперь перейдем к разбору конкретных примеров расчета потенциала электростатического поля с известным распределением напряженности поля или наоборот – расчета $\vec{E}$ по известному распределению φ.

Задача 1. *Заряженная проводящая сфера радиусом R_1 окружена сферическим слоем диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε и внешним радиусом R_2 (рис.1). Найдите распределение потенциала $\varphi(r)$ во всем пространстве и нарисуйте соответствующий график, если заряд сферы равен Q.*

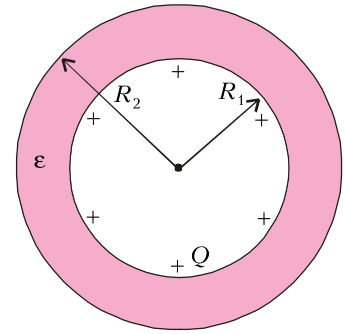

Рис. 1

Сначала найдем распределение напряженности электрического поля $E(r)$. Поскольку задача сферически симметрична, напряженность и потенциал будут зависеть только от радиуса r. Разобьем наше пространство на три части: $r \ge R_2$; $R_1 \le r \le R_2$; $r \le R_1$.

Напряженность поля в области $r \ge R_2$, очевидно, равна напряженности поля точечного заряда Q, помещенного в центр сферы. Следовательно, в этой области

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Воспользуемся связью между напряженностью поля и потенциалом:

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

Отсюда найдем

$$d\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr.$$

После интегрирования обеих частей этого равенства получим

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{const}.$$

Для нахождения константы за нулевой уровень потенциала примем бесконечность: при $r \to \infty$ $\varphi \to 0$. При таком выборе константа будет равна нулю, и распределение потенциала будет иметь вид

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Теперь рассмотрим область $R_1 \le r \le R_2$. В этой области поле будет эквивалентно полю точечного заряда Q, который помещен в центр сферы, а все пространство заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Поэтому распределение напряженности поля здесь запишется в виде

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}.$$

Для приращения потенциала получим

$$d\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}\,dr.$$

После интегрирования обеих частей этого равенства зависимость $\varphi(r)$ будет иметь вид

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r} + \text{const}.$$

Поскольку $\varphi(r)$ – непрерывная функция, потенциал при $r = R_2$ должен быть одним и тем же как при стремлении r к R_2 справа, так и при стремлении слева, т.е.

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R_2} + \text{const}.$$

Отсюда константа будет равна $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)$, а распределение $\varphi(r)$ будет иметь вид

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r} + \frac{Q(\varepsilon - 1)}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R_2}.$$