Прогулка до теоремы Чебышёва

В.УФНАРОВСКИЙ

Не так уж и трудно задачи решать:
Проблема дает вдохновенье.
Искусство же в том, чтоб суметь отыскать
Задачу, когда есть решенье.

П. Хэйн. Груки

Есть особая прелесть в прогулках «куда глаза глядят»: идешь, сам не зная куда, и вдруг встречаешь что-то совсем неожиданное, чего и в голову не могло прийти, когда начинал прогулку. Давайте и мы прогуляемся по одной хитрой математической тропинке.

Мы начнем ее с признака делимости на 9: *число n делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.* Можно даже более внушительно: *если от числа n отнять его сумму цифр, которую мы обозначим $\sigma(n)$, то результат всегда будет делиться на 9.*

А теперь присядем и поговорим об обозначениях. От их выбора, как ни странно, зависит очень и очень многое, поэтому в обозначениях математики всегда достаточно консервативны. Например, обозначение n любому математику скажет, что речь идет о целых, скорее всего, натуральных числах (кстати, а какое n у нас?). Неспроста мы выбрали и обозначение σ — как-никак это маленькая буква «сигма», а большая Σ издревле используется для обозначения сумм. У нас сумма маленькая, так что и букву возьмем маленькую.

Посмотрим на обозначения еще с одной стороны. Вы, конечно, знаете, арабы пишут не так, как мы — слева направо, а наоборот, справа налево. Но задумывались ли вы о том, что сами-то мы с числами обращаемся по-арабски — справа налево. Ну да, не поверите вы, ведь числа мы пишем слева направо. Это да. А складываете вы как? С какой цифры начинаете, с первой или с последней? А умножаете? Попробуйте наоборот! Это неудивительно, цифры и обозначения у нас, как известно, арабские. В действительности удобнее было бы писать и цифры справа налево, но что поделаешь: привычка — вторая натура.

Чтобы обойти привычку, будем записывать число в другой форме — не через цифры, а через разложение в степени десятки; скажем, не 234, а $4+3\cdot 10+2\cdot 100$. Против этого наша привычка не восстает, поэтому запишем и наше число n в таком виде:

$$n = a_0 + a_1\cdot 10 + a_2\cdot 10^2 + \ldots + a_k\cdot 10^k,$$

где a_0 — последняя цифра, a_1 — предпоследняя, …, a_k — первая, так что всего цифр $k+1$, а их сумма равна

$$\sigma(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k.$$

Опубликовано в «Кванте» №6 за 1992 год.

Ну а теперь ничего не стоит доказать наше утверждение:

$$n-\sigma(n) = (a_0 - a_0) + a_1(10-1) + a_2\left(10^2-1\right) + \ldots + a_k\left(10^k-1\right) = 0 + 9a_1 + 99a_2 + \ldots + 99\ldots 9a_k,$$

что, конечно же, делится на 9 (кстати, сколько девяток в последней записи?).

Налюбовавшись результатами своего труда, продолжим прогулку. Что еще можно получить так же просто, не особенно напрягаясь? Можно менять одно из трех: задачу, доказательство, обозначения. Доказательство менять не хочется. Можем ли мы поменять задачу? Да, нетрудно придумать и доказать признак делимости на 11 — только сумму нужно брать знакочередующуюся $(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots)$. Если копнуть глубже, то получится что-то вроде универсального признака делимости (докажите его в качестве упражнения):

Пусть m — натуральное число и $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — остатки чисел 10, $10^2, \ldots, 10^k$ при делении на m. Тогда число $n-(a_0 + a_1p_1 + a_2p_2 + \ldots + a_kp_k)$ делится на m.

При $m = 9$ получаем уже доказанный ранее результат. (А как насчет 11?) Для $m = 7$ получаем последовательность $\{p_i\}$: 3, 2, 6; 4, 5, 1, 3, 2 и т. д. Поэтому, например, остаток от 1992 при делении на 7 равен остатку $2+9\cdot 3+9\cdot 2+1\cdot 6=53$, что в свою очередь равно остатку $3+5\cdot 3=18$, что в свою очередь… Пожалуй, можно остановиться и сказать, что это 4. Не слишком интересно…

Пойдем в другую сторону — попробуем поменять обозначения. Как еще можно обозначить наше число n? Тот, кто хоть немного знаком с программированием, сразу скажет — надо использовать другую систему счисления, например двоичную:

$$n = b_0 + b_1\cdot 2 + b_2\cdot 2^2 + \ldots + b_m\cdot 2^m,$$

где b_i — это нули и единицы. (Например, $25 = 1+0\cdot 2+0\cdot 4+1\cdot 8+1\cdot 6$.) Тут тоже своя сумма цифр: $\sigma_2(n) = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots$ (Цифра 2, конечно же, намекает на основание системы счисления, так что наша σ — это σ_{10}.)

Соответствующая теорема звучит так: $n-\sigma_2(n)$ делится на… А в самом деле, на что? В десятичной системе делилось на $9 = 10-1$, значит, здесь должно делиться на $2-1=1$. Факт верный, но малоценный. А может, попробовать в общем случае, в p-ичной системе счисления, где p — произвольное