10. Докажите, что первые n натуральных чисел, где $n > 10$, можно разбить на два множества таким образом, чтобы произведение чисел первого из них равнялось сумме чисел второго.

А. Шаповалов

11. На нижней горизонтали доски размером 2×25 выстроились фишки с номерами от 1 до 25 по порядку. За один ход можно переставить одну фишку на пустую соседнюю (по горизонтали или вертикали) клетку. За какое наименьшее число ходов удастся расставить все фишки на нижней горизонтали в обратном порядке?

А. Шаповалов

12. Можно ли пятиконечную звезду разрезать на три выпуклых многоугольника?

В. Произволов

13. Докажите, что любую степень двойки можно умножить на такое натуральное число, что произведение окажется палиндромом – числом, десятичная запись которого слева направо читается так же, как и справа налево.

А. Шаповалов

14. Любое ли натуральное число представимо в виде разности двух палиндромов?

А. Шаповалов

15. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ существуют $2n$ таких попарно различных натуральных чисел, что произведение факториалов первых n из них равно произведению факториалов n других.

А. Егоров, В. Сендеров

16. Найдите такое наименьшее натуральное число n, что среди углов любого выпуклого n-угольника найдутся такие три, что их величины численно равны длинам сторон некоторого треугольника.

Е. Барабанов, И. Воронович

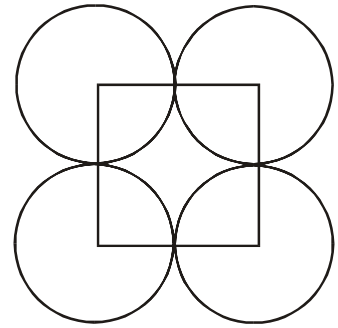
17. На доску размером 11×11 клеток положили несколько квадратов размером 2×2 так, что каждый квадрат закрывает ровно 4 клетки и никакие два квадрата не пересекаются более чем по одной клетке. Какое наибольшее число квадратов могло быть?

Д. Калинин

18. Кавалеров ордена Славы выстроили в виде каре 7×7. На каждом – один, два или три ордена. Слава посчитал число орденов в каждой шеренге, колонне и каждой из двух диагоналей каре. Докажите, что эти числа не могли быть все разными.

Фольклор

19. По четырем одинаковым окружностям единичного радиуса с центрами в вершинах квадрата со стороной длины 2 вечно бегут спортсмены, не переходя с окружности на окружность (см. рисунок). Из любых трех спортсменов хотя бы двое периодически встречаются. Каково наибольшее возможное число спортсменов? (Спортсмены встречаются, если они бегут по одной окружности в противоположных направлениях или если они бегут по касающимся окружностям и одновременно оказываются в точке касания.)



А. Чеботарев

20. Действительные числа a и b таковы, что

$$a + b^5 > ab^5 + 1.$$

Докажите неравенство

$$b + a^7 > a^7 b + 1.$$

Е. Барабанов, И. Воронович

21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{yz}}{y+z}, \\ y = \dfrac{\sqrt{zx}}{z+x}, \\ z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}. \end{cases}$$

А. Жуков

22. Таня задумала натуральное число, не превосходящее 100. Саша пытается его угадать. Если он угадал, то Таня так и говорит: «Угадал!» Если же названое Сашей число не совпадает с тем, которое в этот момент имеется у Тани, то она молчком делит имеющееся в этот момент у нее число на Сашино, если делится нацело, а если не делится, то молчком умножает имеющееся у нее число на Сашино и прибавляет единицу. Помогите Саше узнать число, задуманное Таней вначале.

А. Шаповалов

23. Какое наибольшее число полей шахматной доски можно отметить так, чтобы центры никаких четырех отмеченных клеток не оказались вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски?

А. Шаповалов

24. В полном однокруговом турнире участвуют n команд. Они договорились, что каждая команда в своей k-й игре забивает k голов. Каково наименьшее число ничьих в таком турнире?

А. Чеботарев

Публикацию подготовили И.Акулич, А.Спивак