Ф1877. На тороидальном сердечнике с большой магнитной проницаемостью намотана толстым проводом катушка, содержащая большое количество витков. От середины обмотки сделан отвод. Крайние выводы катушки подключили к сети 220 В, а между крайним и средним выводами катушки включили лампу на 110 В мощностью 60 Вт. Найдите токи в каждой из половин обмотки. Кстати, заметим, что такое устройство (катушка с отводом на ферромагнитном сердечнике) называется автотрансформатором.

З.Рафаилов

Решения задач М1841—М1845, Ф1853—Ф1862

М1841. *Для натуральных чисел a, b, c докажите равенство*

$$НОК\left(НОД(a,b), НОД(b,c), НОД(c,a)\right) = НОД\left(НОК(a,b), НОК(b,c), НОК(c,a)\right)$$

(НОК – наименьшее общее кратное, НОД – наибольший общий делитель).

Решить задачу нетрудно, если хорошо осмыслить для себя понятия наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя.

Справедливость заявленного равенства установим, прибегая к каноническому разложению чисел a, b и c на простые сомножители. Произвольное простое число p входит в разложение числа a в степени k, в разложение числа b – в степени m, в разложение числа c – в степени n, где для определенности $0 \le k \le m \le n$.

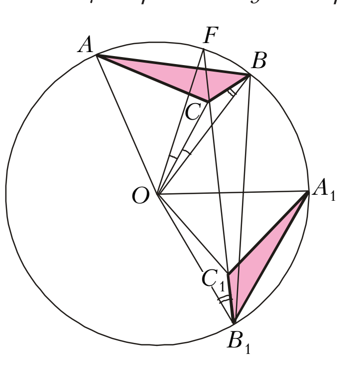
Проанализируем левую часть равенства. Число НОД(a, b) содержит в своем разложении простое p в степени k, число НОД(b, c) – в степени m, число НОД(c, a) – в степени k. Значит, левая часть равенства в каноническом разложении содержит сомножитель p^m.

Проанализируем правую часть равенства. Число НОК(a, b) содержит в своем разложении простое p в степени m, число НОК(b, c) – в степени n, число НОК(c, a) – в степени n. Значит, правая часть равенства, как и левая, содержит в каноническом разложении сомножитель p^m.

Это означает, что всякое простое число входит сомножителем в левую часть в той же степени, в какой оно входит и в правую, т.е. равенство доказано.

В.Произволов

М1842. *Вершины A и B треугольника ABC лежат на окружности с центром O. Точки C и O находятся по одну сторону от AB. Поворотом треугольника ABC около центра O получен треугольник $A_1B_1C_1$, причем луч B_1C_1 проходит через вершину C и пересекает окружность в точке F. Докажите, что CF = CB.*



Так как $\Delta OB_1A_1 = \Delta OAB$, то $\angle OB_1A_1 = \angle ABO$, но и $\angle C_1B_1A_1 = \angle CBA$ (см. рисунок). Значит, $\angle OB_1C_1 = \angle CBO$ и около четырехугольника B_1OCB можно описать окружность. Из этого следует, что $\angle CB_1B = \angle COB$, но $\angle CB_1B = \frac{1}{2}\overset{\smile}{FB} = \frac{1}{2}\angle FOB$, т.е. $\angle FOC = \angle COB$ и $\Delta FOC = \Delta COB$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует утверждение задачи: $CF = CB$.

В.Дубов

М1843. *Имеется неограниченное количество кошельков. Первоначально в одном из них лежит KM монет (K, M – натуральные), а остальные кошельки пусты. Затем неоднократно выполняется следующая операция: из каждого кошелька, в котором есть монеты, вынимается по одной монете, и все вынутые монеты складываются в какой-либо пустой кошелек. Через некоторое время в K кошельках оказалось по M монет. При каких K и M такое возможно?*

Описанную в условии операцию изъятия монет и складывания их в пустой кошелек назовем *ходом*. Кроме того, введем еще несколько терминов. Тот кошелек, в который в процессе хода складываются вынутые монеты, назовем *новым* (т.е. после каждого хода новым является ровно один кошелек). Другие непустые кошельки, которые имеются после хода, назовем *старыми* (ясно, что перед ходом в каждом из старых кошельков было на 1 монету больше, чем после хода). Наконец, кошельки, в которых перед ходом было ровно по одной монете, а после хода, разумеется, ничего не осталось, назовем *опустевшими.*

Рассмотрим ситуацию после любого хода. В новый кошелек попало по одной монете из каждого старого кошелька плюс, возможно, по одной монете из каждого опустевшего кошелька (если таковые были). Следовательно, число монет в новом кошельке *не меньше* количества старых кошельков. Этот факт (обозначим его Ф1) в дальнейшем будет использован.

Итак, пусть после какого-то хода стало K кошельков по M монет в каждом. Один из них, разумеется, новый, а остальные $(K - 1)$ – старые. Согласно Ф1 должно выполняться неравенство $M \ge K - 1$, или $K \le M + 1$. Уже какое-то ограничение! Воспользовавшись им, проверим «вручную» самые маленькие M, не превышающие 2 в сочетании с допустимыми K для каждого M.

1) Если $M = 1$, то $K = 1$ или 2. Рассмотрим оба случая.

$K = 1$. Тогда $KM = 1$, и первоначально в кошельке одна монета. На первом же ходу она будет переложена в другой кошелек, что соответствует ситуации, описанной в условии ($K = 1$ кошелек с $M = 1$ монетой). Таким образом, значения $K = 1$, $M = 1$ являются одним из ответов на вопрос задачи.

$K = 2$. Тогда $KM = 2$, и первоначально в кошельке 2 монеты. После первого хода в двух кошельках станет по одной монете, поэтому значения $K = 2$, $M = 1$ являются еще одним ответом. Для удобства запишем этот ход в виде $2 \to 1,1$, и в дальнейшем также будем использовать аналогичные обозначения.

2) Если $M = 2$, то $K = 1$, 2 или 3, и $KM = 2$, 4 или 6 соответственно. Рассмотрим все случаи.

$K = 1$. Тогда $KM = 2$, и первоначально в кошельке 2 монеты. Здесь «состояние» кошельков изображается схемой: $2 \to 1,1 \to 2$, т.е. также возникла удовлетворяющая условию ситуация: $K = 1$ кошелек с $M = 2$ монетами. Так что имеем третий ответ: $K = 1$, $M = 2$.

$K = 2$. Тогда $KM = 4$, и первоначально в кошельке 4