XI Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. а) $2^{2003}-1$; б) $9\cdot 2^{2002}$. *Указание.* Умножим число $A=\overline{a_1\ldots a_k}$, где $a_1,\ldots,a_k\neq 0$ – цифры, на $\underbrace{99\ldots9}_{n}$, $n\geq k$. Имеем

$$B=A\left(10^n-1\right)=A\cdot 10^n-A=\overline{a_1\ldots a_k\underbrace{00\ldots0}_{n}}-\overline{a_1\ldots a_k}.$$

Выполняя вычитание «столбиком», получим

$$B=A\left(10^n-1\right)=\overline{a_1\ldots(a_k-1)\underbrace{99\ldots9}_{n-k}(9-a_1)(9-a_2)(10-a_k)}.$$

Это число $(n+k)$-значно, а сумма цифр его равна $9n$. Поэтому количество цифр в десятичной записи произведения равно

$$1+2+2^2+\ldots+2^{2002}=2^{2003}-1,$$

а сумма цифр равна $9\cdot 2^{2002}$.

2. h^2. *Указание.* На продолжении стороны AD за точку D возьмем точку D' такую, что $AD'=CD$. Треугольники $D'AB$ и BDC равны. Поэтому треугольник $D'BD$ – равнобедренный и, кроме того, прямоугольный.

3. $\sqrt[3]{3/2}$. Пусть $y=2x^3+x-3$, тогда $x^3=\dfrac{y-x+3}{2}$ и $y^3=3-\dfrac{y-x+3}{2}$, т.е.

$$x=2y^3+y-3.$$

Осталось решить систему уравнений

$$\begin{cases}y=2x^3+x-3,\\ x=2y^3+y-3.\end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, после преобразований получаем уравнение

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2+1\right)=0.$$

Второй множитель заведомо не равен нулю

$$\left(x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0\right),$$

поэтому $x=y$.

4. а) Нет; б) нет; в) нет. *Указание.* Пусть $n-1$, n, $n+1$ – последовательные целые числа. Сумма их квадратов равна $3n^2+2$ и при делении на 9 имеет остатки 2 или 5. В то же время сумма кубов нескольких последовательных чисел при делении на 9 может иметь остатки 0, 1 или 8.

5. 120°. *Указание.* Точка L является точкой пересечения биссектрис внутреннего угла ABK и внешнего угла AKC треугольника ABK. Поэтому AL – биссектриса внешнего угла при вершине A этого треугольника.

6. 11. Если груз представляет собой 44 ящика с массой $\dfrac{36}{44}$ т $=\dfrac{9}{11}$ т, то меньше чем за 11 рейсов его перевезти нельзя. Покажем, как можно перевезти весь груз за 11 рейсов. Сначала будем загружать ящики в машину по одному до тех пор, пока масса груза в кузове не превысит 4 т. Снимем после этого последний положенный ящик, отложим его в сторону и отправим машину. Затем повторим такую процедуру 7 раз. Останутся 8 отложенных ящиков и еще сколько-то ящиков с общей массой, меньшей 4 т. Очевидно, что все оставшиеся ящики можно увезти за 3 рейса.

7. Пусть, для определенности, $m\leq n$. Разрезать прямоугольник $m\times n$ на уголки можно тогда и только тогда, когда $m\times n$ делится на 3, кроме случаев: $m=1$, n любое; $m=3$, n нечетно. *Указание.* Если $m\times n$ делится на 6, прямоугольник можно разрезать на прямоугольники 2×3 и, следовательно, на уголки. При нечетных $m\geq 5$, $n\geq 9$ вырежем из прямоугольника $m\times n$ угловой прямоугольник 5×9. Оставшаяся часть доски разрезается на прямоугольники 2×3, а сам прямоугольник 5×9 без труда разрезается на уголки.

ФИЗИКА

1. а) $s=\dfrac{ml}{m+M}$; б) $s=0$, при $k\to 0$ к концу движения рыбака лодка сдвинется на $s\approx\dfrac{ml}{m+M}$, а обратное смещение лодки будет сравнимо с s через большое время $t\sim\sqrt{\dfrac{m+M}{k}}$.

2. $k=4$. *Указание.* Во втором случае шнур в конце движения окажется нерастянутым.

3. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{(4\alpha)^3 g}}\approx 230$ дней, где R – радиус Земли, $\alpha=0{,}001$.

4. $k=28/25=1{,}12$.

5. $v=\sqrt{\dfrac{q^2\Delta R}{4\pi\varepsilon_0 R^2 m}}$.

6. $a=\dfrac{mg}{m+\varepsilon_0 SdB^2}$.

7. $\alpha=\arcsin\dfrac{m_p}{m_d}=\arcsin\dfrac{1}{2}=30^\circ$.

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. 6 ч. **2.** Может. См. рис.8.

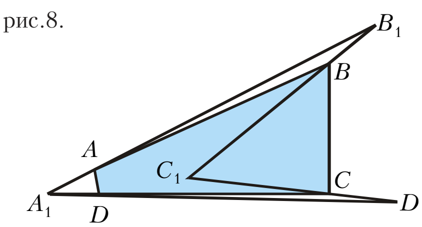

Рис. 8

3. Не является, ибо $16016003+1=4002^2$.

4. 17. **5.** 5.

6. На прямой l возьмем точку O и проведем полуокружность радиусом OA с центром в точке O (первая линия), пересекающую l в точках K и L. Затем раствором циркуля, равным KA, проведем окружность с центром в точке L, пересекающую полуокружность в точке A' (вторая линия). Наконец, линейкой проводим прямую AA' (третья линия).

7. $a>b$. Это легко следует из цепочки неравенств

$$\frac{1}{2}<\sqrt{a(1-b)}\leq\frac{a+1-b}{2}.$$

8. Можно. Пусть нужной тройки команд нет. Возьмем любые 2 команды A и B и будем считать, что A выиграла у B. Но тогда A выиграла и у всех команд, проигравших B, т.е. A набрала больше очков, чем B. Таким образом, любые две команды набрали по разному числу очков. Но тогда найдется команда, набравшая ровно 7 очков. Противоречие.

9. Племяннику в 2025 году исполнится 45 лет, так что в 2002 году ему исполнилось 22 года.

10. 8. Пусть v_A, v_B и v_C – скорости мотоциклистов, t – время, по прошествии которого они оказались в одной точке, l – длина дороги. Тогда $v_At-v_Bt=4l$, $v_Bt-v_Ct=5l$, т.е. $v_At-v_Ct=9l$. Значит, A прошел на 9 кругов больше, чем C, и, следовательно, обгонял его 8 раз.

ФИЗИКА

2. Падение. **3.** Разжечь костер под трубой.

4. Лодка будет плавать, если верхний край ящика окажется выше уровня воды в реке.

5. Примерно 65 дней.

6. В первом чайнике уровень воды ниже основания носика.

7. В 8 раз.

8. Космонавт никогда не упадет на Землю, а будет двигаться по эллиптической орбите, близкой к круговой.