ружности O, получим 10 треугольников, равных друг другу по трем сторонам. Их высоты, проведенные из вершины O, равны. Следовательно, сомнительная десятая сторона касается той же окружности, что и остальные девять сторон десятиугольника.

9. Пусть наибольшее из выписанных чисел равно d. Это означает, что разность между любыми двумя близкими числами по абсолютной величине не превосходит d.

Заметим, что из любой угловой клетки таблицы ходом шахматного короля можно перейти в противоположную угловую клетку ровно за $m-1$ ходов. В самом деле, двинемся сначала по диагонали. Через $n-1$ ходов мы окажемся на одной вертикали с противоположной угловой клеткой и еще через $m-n$ ходов по вертикали достигнем цели. Общее число ходов составит $m-1$. Отсюда следует, что из любой клетки таблицы можно перейти в любую другую не более чем за $m-1$ ходов. Следовательно, из клетки с числом 1 можно перейти в клетку с числом mn также не больше чем за $m-1$ ходов. Поэтому разность между числами 1 и mn по абсолютной величине не превышает $d(m-1)$.

Итак, $mn-1 \le d(m-1)$, откуда $d \ge \frac{mn-1}{m-1} = n + \frac{n-1}{m-1}$. Так как $n > 1$, то $\frac{n-1}{m-1} > 0$ и $d \ge n+1$. Получена оценка снизу. Максимальную разность $n+1$ между числами в близких клетках таблицы можно достичь, расставив их следующим образом. Числа от 1 до n запишем в первую строку, числа от $n+1$ до $2n$ – во вторую строку, и т.д. Несложно проверить, что разность между любыми числами в близких клетках такой таблицы не превышает $n+1$.

10. Такое натуральное число n существует. Для доказательства этого факта воспользуемся вспомогательным утверждением:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Обозначим $S_1 = 1+2+\ldots+n$, $S_2 = 1^2+2^2+\ldots+n^2$ и рассмотрим тождество $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1$. Полагая в нем последовательно $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ и суммируя почленно получающиеся равенства, имеем

$$\left(2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3\right) - \left(1^3+2^3+\ldots+n^3\right) = 3S_2+3S_1+n.$$

Итак, $3S_2+3S_1+n = (n+1)^3-1$. Но $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$, поэтому $S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Вспомогательное утверждение доказано. Пусть $n = 2k+1$ и $x-k, x-k+1, \ldots, x, \ldots, x+k-1, x+k$ – числа задачи. Имеем

$$n^2 = (x-k)^2+\ldots+x^2+\ldots+(x+k)^2,$$

$$(2k+1)^2 = (2k+1)x^2 + 2\frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

$$3(2k+1) = 3x^2 + k(k+1),$$

$$k^2-5k+3x^2-3 = 0.$$

Отсюда

$$k = \frac{5 \pm \sqrt{25-4\left(3x^2-3\right)}}{2},$$

а значит,

$$25-4\left(3x^2-3\right) = y^2,$$

где y – целое число. Получили

$$37-12x^2 = y^2.$$

При $x = 0$ это равенство не выполняется $\left(37 \ne y^2\right)$, при $x = \pm 1$ – выполняется: $37-12 = (\pm 5)^2$. При этом либо $k = 0$ и $n = 1$, либо $k = 5$ и $n = 11$. Числа задачи во втором случае таковы: $-6, -5, \ldots, 3, 4$ либо $-4, -3, \ldots, 5, 6$. Получили

$$11^2 = (-6)^2+(-5)^2+\ldots+3^2+4^2 = (-4)^2+(-3)^2+\ldots+5^2+6^2.$$

(Заметим, что при $|x| \ge 2$ будет $37-12x^2 < 0$, а значит, равенство $37-12x^2 = y^2$ опять не выполнено. Кроме того, рассуждая, как и выше, легко показать, что никакое число $n = 2k$ условиям задачи не удовлетворяет. Таким образом, 11 – единственное число, удовлетворяющее условиям задачи.)

Термодинамика круговых процессов

1. $T_1 = T_3 = \sqrt{T_2T_4}$. **2.** $T_1 = \frac{2Q}{9\nu R}$; $A = \frac{Q}{3}$.

3. $A_{23} = A - \frac{5}{2}R\Delta T$. **4.** $A_{23} = A + \frac{4}{3}A_{12}$.

Институт естественных наук и экологии при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

1. В указанной области система имеет два решения:

$$\left(-\arcsin\left(2/\sqrt{5}\right); -\arcsin\left(1/\sqrt{5}\right)\right),$$

$$\left(\arcsin\left(2/5\sqrt{5}\right); \arcsin\left(1/\sqrt{5}\right)\right).$$

2. $-1/2$. **3.** $x_0 = 1/2$, $S_{\min} = 356/15 = 23\frac{11}{15}$. **4.** $rR/(r+R)$.

5. $r(h+H)\Big/\sqrt{r^2+H^2}$. **6.** $x\left(x^{n+1}-(n+1)x+n\right)\Big/(x-1)^2$.

ФИЗИКА

1. $T = 2\pi\sqrt{\frac{2R(M+2m_1)}{g(m_2-m_1)}}$.

2. 1) $A = \frac{1}{2}R\Delta T$; $C = \frac{R(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}$, где γ – отношение молярных теплоемкостей газа C_p и C_V, определяемых при постоянных давлении и объеме соответственно;

2) $\Delta V = V_1\left(\sqrt{1+\frac{\Delta T}{T_1}}-1\right)$.

3. $Q = \frac{9}{4}C\mathcal{E}^2$.

4. $\Delta l = \left(\frac{2\pi b(a+b)}{\mu_0 I a^2}\right)^2 R\Delta p$. *Указание*: индукция магнитного поля бесконечного прямого провода с током I на расстоянии d от провода равна $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}$.

5. 1) $l < \frac{n(d-F)}{n-1}$; 2) $\Gamma = \frac{F}{F-d}$.

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ РФ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. Первое число больше.

2. $\arccos\left(1/\sqrt{3}\right)+\pi n$, $\pi - \arccos\left(1/\sqrt{3}\right)+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

3. $\left(\log_5\frac{3}{10}; \log_5\frac{1}{3}\right) \cup \left(0; \log_5 3\right)$.