«Квант» для «младших» школьников

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Покажем, что двух взвешиваний достаточно для того, чтобы среди трех весов A, B, C определить неисправные.
Взвесим на весах A весы B и C. Если обнаружится равновесие, то весы A неисправные. В противном случае одни из взвешиваемых весов тяжелее и, значит, заведомо исправные. Произведя на них второе взвешивание, выявим неисправные весы.
Одного взвешивания недостаточно. Если первое взвешивание производится на неисправных весах, то результат этого взвешивания может быть каким угодно, и определить по нему неисправные весы в общем случае не удастся.

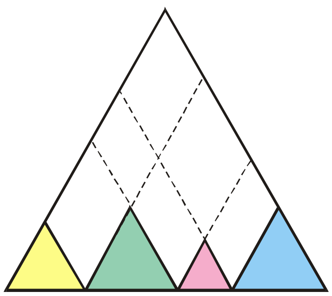

Рис. 1

2. Рассмотрим все маленькие треугольники, примыкающие к основанию исходного треугольника (рис.1). Поскольку сумма периметров этих треугольников равна периметру исходного треугольника, то периметр исходного треугольника выражается целым числом.

3. Один из трех географических объектов, с которыми соединен мостами остров Чанга, или один из трех объектов, с которыми соединен остров Чунга, должен быть материком. Пусть, для определенности, с материком соединен остров Чанга. Тогда Чунга и связанные с ним три острова образуют изолированную группу островов, не связанную ни с материком, ни с остальными островами архипелага. В этом случае с острова Чанга и двух связанных с ним островов выходит по одному мосту на материк. Таким образом, острова архипелага с материком связывают 3 моста (рис. 2).

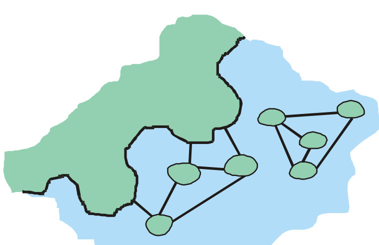

Рис. 2

4. Произвольно разрезая исходные квадраты на прямоугольники 2×1, мы получим два одинаковых набора прямоугольников. Докажем это.
Условимся считать, что исходные квадраты окрашены белым, синим и красным цветом. Предположим, что во втором наборе красно-синих прямоугольников больше, чем в первом наборе. Тогда в первом наборе должно быть больше красно-белых и сине-белых прямоугольников. Но в таком случае белых клеток в первом наборе окажется больше, чем во втором. Противоречие.
Аналогично рассматривая другие пары цветов, убеждаемся, что в обоих наборах имеется равное количество одинаково окрашенных прямоугольников. Следовательно, из прямоугольников второго набора всегда можно составить точно такой же квадрат, как и из частей первого набора.

5. Вместо многоточий можно последовательно вставить, например, следующие числа: 2, 6, 14, 15, 17, 20, 22, 25, 27, 28.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2002 г.)

6. В условии этой задачи (по вине ведущего рубрики) была допущена неточность. Исправленный вариант условия задачи был опубликован на сайте math.child.ru. Приведем его здесь вместе с авторским решением задачи. В конце дадим решение задачи, опубликованной в журнале.
Задача. *8 одинаковых по внешнему виду монет расположены по кругу. Известно, что 3 из них фальшивые (более тяжелые по весу), причем эти монеты лежат рядом друг с другом (подряд). Все фальшивые монеты весят одинаково, все настоящие тоже. Можно ли определить все три фальшивые монеты, произведя лишь два взвешивания на чашечных весах без гирь?*
Решение. Пронумеруем монеты по часовой стрелке, начиная с любой из них. Первым взвешиванием сравним общий вес 1, 2, 3 и 5, 6, 7 монет. Если вес оказался равным, то это может быть только в том случае, если в каждой кучке по одной фальшивой монете. Вторым взвешиванием сравниваем вес 4 и 8 монет. Одна из них окажется более тяжелой, следовательно, эта монета и ее соседи – искомые.
Если вес оказался не равным, то это значит, что в более тяжелой кучке либо две, либо три фальшивые монеты. Вторым взвешиванием сравниваем вес 4 и 8 монет. Если их вес оказался одинаковым, то все фальшивые монеты находятся в более тяжелой кучке из предыдущего взвешивания. Если же вес 4 и 8 монет не одинаков, то фальшивые монеты – это более тяжелая из второго взвешивания и ее два соседа (с одной стороны), находящиеся в более тяжелой кучке из первого взвешивания.
Итак, три фальшивые монеты можно определить за два взвешивания.
А вот решение задачи, опубликованной в журнале.
Очевидно, что если ни про одну из 8 монет нельзя сказать, настоящая она или фальшивая, то за одно взвешивание на чашечных весах без гирь выделить из них три фальшивые монеты невозможно. И такая неопределенная ситуация всегда может возникнуть после первого взвешивания.
Действительно, если при первом взвешивании на весы каким-то образом выкладываются все монеты (никакие монеты не откладываются в сторону), то определить по результатам этого взвешивания хотя бы одну фальшивую монету невозможно.
Предположим, какие-то монеты при первом взвешивании откладываются в сторону, а на обеих чашах весов размещаются одинаковые количества монет. Если при взвешивании весы окажутся в равновесии, то по результатам этого взвешивания определить хотя бы одну фальшивую монету невозможно.
Если какие-то монеты откладываются в сторону, а на обе чаши весов размещаются разные количества монет, то легко проверить, что по результатам такого взвешивания определить хотя бы одну фальшивую монету невозможно.
Итак, за два взвешивания определить три фальшивые монеты нельзя.

7. Решение задачи содержится в статье А.Малеева в этом номере журнала.

8. Рассмотрим две соседние стороны AB и BC десятиугольника, касающееся указанной в условии задачи окружности ω в точках P и Q (рис.3). Поскольку $AB = BC$ и $BP = BQ$, то $AP = QC$ и, следовательно, $AO = OC$ (O – центр окружности ω). Таким образом, все вершины десятиугольника, взятые через одну, лежат на окружности, концентричной ω. Соединив все вершины десятиугольника с центром ок-

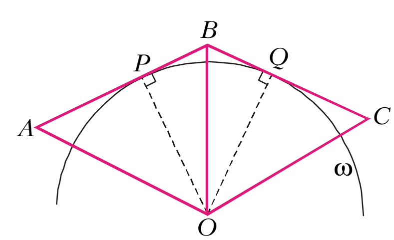

Рис. 3