$\Leftrightarrow k \geq n-1$. Но $k \leq n-1$, значит, $k = n - 1$. Получаем

$$x^{n-1}(1+x)-1 \vdots x^n + x^2 - 1 \Leftrightarrow x^n + x^{n-1} - 1 \vdots x^n + x^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^{n-1} - x^2 \vdots x^n + x^2 - 1,$$

т.е. $n - 1 = 2$, $n = 3$. Противоречие.

Значит, $n = 3$, $m = 5$ – единственная подходящая пара.

4 (К.Сухов). Из равенства $\frac{n}{d_i} = d_{k+1-i}$ следует, что

$$D = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k = \frac{n^2}{d_kd_{k-1}} + \ldots + \frac{n^2}{d_2d_1} =$$

$$= n^2\left(\frac{1}{d_1d_2} + \frac{1}{d_2d_3} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}d_k}\right).$$

а) Докажем, что

$$\frac{1}{d_1d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}d_k} < 1,$$

откуда и будет следовать неравенство $D < n^2$. Действительно, $d_i \geq d_{i-1} + 1 \Rightarrow d_i \geq i$, $i - 1, \ldots, k$, поэтому

$$\frac{1}{d_1d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}d_k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{d_1(d_1+1)} + \frac{1}{d_2(d_2+1)} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}(d_{k-1}+1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{k} < 1.$$

б) Если D – делитель n^2, то $\frac{n^2}{D} = m$, где $m \in \boldsymbol{N}$. Значит,

$$\frac{1}{d_1d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1}d_k} = \frac{1}{m}.$$

Предположим, что $k > 2$, тогда $\frac{1}{m} > \frac{1}{d_1d_2} = \frac{1}{d_2}$, значит, $m < d_2$. Но из а) следует, что $m > 1$, поэтому m содержит простой делитель p, т.е. $p \leq m < d_2$ и $n^2 \vdots m \vdots p \Rightarrow n \vdots p \Rightarrow$ $\Rightarrow d_2 \leq p$. Но $d_2 > m \geq p$ – противоречие.

Итак, $k \leq 2$, но $n > 1$, значит, $k = 2$, т.е. n – простое ($d_1 = 1, d_2 = n$). Проверкой убеждаемся в том, что любое простое n подходит: $D = 1\cdot n = n$ и $n^2 \vdots n$.

Ответ: n – простое число.

5 (М.Дубашинский). *Ответ:* 1) $f(x) \equiv 0$, 2) $f(x) \equiv \frac{1}{2}$, 3) $f(x) \equiv x^2$.

Подставим в данное равенство

$$\left(f(x) + f(z)\right)\left(f(y) + f(t)\right) = f(xy - zt) + f(xt + yz) \quad (1)$$

$x = y = z = t = 0$. Имеем: $4f^2(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ или $f(0) = \frac{1}{2}$.

Пусть $f(0) = \frac{1}{2}$. Подставим в (1) $y = t = 0$, $x = z = a \in \boldsymbol{R}$. Имеем: $2f(a) = 1$, т.е. $f(a) = \frac{1}{2}$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$. Функция $f(x) \equiv \frac{1}{2}$ – один из ответов.

Пусть теперь $f(0) = 0$. Подставим в (1) $z = t = 0$. Имеем: $f(x)f(y) = f(xy)$, т.е. функция f мультипликативна. Тогда из (1) получаем

$$f(xy) + f(yz) + f(xt) + f(zt) = f(xy - zt) + f(xt + yz). \quad (2)$$

Сделав в (2) замены $x \leftrightarrow z$, $y \leftrightarrow t$, получим

$$f(zt) + f(xt) + f(yz) + f(xy) = f(zt - xy) + f(yz + xt). \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получаем $f(xy - zt) = f(zt - xy)$. Но в виде $xy - zt = a$ можно представить любое число $a \in \boldsymbol{R}$ ($x = a$, $y = 1$, $z = 0$). Итак, $f(a) = f(-a)$, т.е. f четна.

Далее, из мультипликативности f имеем $f\left(x^2\right) = f^2(x) \geq 0$. Но в виде $a = x^2$ можно представить любое неотрицательное число a. Значит, $f(a) \geq 0$ при $a \geq 0$. Но $f(-a) = f(a) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) \geq 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Теперь подставим в (2) $x = a$, $y = \sqrt{\frac{b}{a}}$, $z = \sqrt{ab}$, $t = 1$, где $a > 0$, $b \geq 0$. Тогда $xy = zt = \sqrt{ab}$, $xt = a$, $yz = b$ и мы получаем

$$f(a) + f(b) + 2f\left(\sqrt{ab}\right) = f(0) + f(a+b) = f(a+b),$$

так как $f(0) = 0$.

Последнее равенство, с учетом $f(a) = \left(f\left(\sqrt{a}\right)\right)^2$, $f(b) = \left(f\left(\sqrt{b}\right)\right)^2$, $f\left(\sqrt{ab}\right) = f\left(\sqrt{a}\right)\cdot f\left(\sqrt{b}\right)$, дает

$$\left(f\left(\sqrt{a}\right) + f\left(\sqrt{b}\right)\right)^2 = f(a+b),$$

т.е., в силу неотрицательности f,

$$f\left(\sqrt{a}\right) + f\left(\sqrt{b}\right) = \sqrt{f(a+b)}.$$

Отсюда

$$\sqrt{f(a)} + \sqrt{f(b)} = \sqrt{f(a+b)},$$

так как

$$\left(\sqrt{f(a)}\right)^2 = f(a) = \left(f\left(\sqrt{a}\right)\right)^2.$$

Пусть $g(x) = \sqrt{f(x)}$, $x \geq 0$. Тогда $g(a) + g(b) = g(a+b)$, т.е. функция g аддитивна. С другой стороны, $g(xy) = \sqrt{f(xy)} = \sqrt{f(x)f(y)} = \sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{f(y)} = g(x)g(y)$, т.е. g мультипликативна. Таким образом, g аддитивна и мультипликативна. Выведем из этого, что либо $g \equiv 0$, либо $g(x) \equiv x$.

Итак, функция g удовлетворяет равенствам

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \quad (4)$$

$$g(xy) = g(x)g(y). \quad (5)$$

Подставим в (5) $x = y = 1$. Имеем: $g(1) = g^2(1) \Rightarrow g(1) = 1$ или $g(1) = 0$.

Если $g(1) = 0$, то $g(x) = g(x\cdot 1) = g(x)\cdot g(1) = 0 \Rightarrow g(x) \equiv$ $\equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$.

Если $g(1) = 1$, то из (4) $g(m) = mg(1) = m$ при любом $m \in \boldsymbol{N}$. Кроме того,

$$m = g\left(n\cdot\frac{m}{n}\right) = ng\left(\frac{m}{n}\right) \Rightarrow g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n},$$

т.е. $g(r) = r$ для любого $r \in \boldsymbol{Q}_+$.

Из (4) и неотрицательности $g(y)$ при $y \geq 0$ следует монотонность g ($g(x)$ возрастает). Но $g(x) = x$ при $r \in \boldsymbol{Q}_+$. Значит, $g(x) \equiv x$ при $x \geq 0$. Действительно, пусть $g(x) \neq x$ при некотором $x > 0$. Возьмем число $r \in \boldsymbol{Q}_+$ между x и $g(x)$. Тогда $g(r) = r$, а пары $(r; x)$ и $\left(g(r); g(x)\right)$ упорядочены поразному, что противоречит монотонности g.

Итак, если $g(1) = 1$, то $g(x) \equiv x$ при $x \geq 0$. Отсюда $f(x) \equiv x^2$ при $x \geq 0$. Но $f(x)$ – четная функция, следовательно, $f(x) = x^2$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.