что $l_{j_0} = 0$. Итак, либо P и Q одновременно равны нулю, либо являются произведением одинаковых наборов множителей.

Утверждение доказано.

2 (А.Бадзян). Из условия (рис.1) следует, что $OF = FA$, $OE = EA$, кроме того, $OF = OA = OE = R$, где R – радиус окружности Γ. Значит, ΔOFA и ΔOEA – правильные. Отсюда $\angle AOE = 60^\circ$, $\angle AOF = 60^\circ$, следовательно, точка E

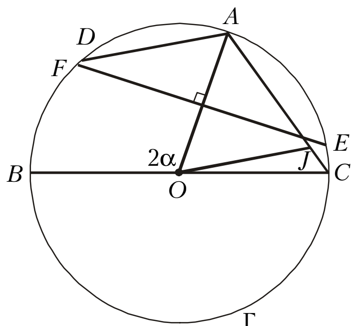

Рис. 1

лежит на дуге AC, не содержащей точки B, так как $\angle AOB < 120^\circ$. Далее, $\angle ECA = \frac{1}{2} \cup EA = \frac{1}{2}\angle AOE = 30^\circ$, $\angle ACF = \frac{1}{2} \cup AF = \frac{1}{2}\angle AOF = 30^\circ$, т.е. CA – биссектриса угла ECF.

Пусть $\angle AOB = 2\alpha$, тогда $\angle OAC = \frac{1}{2}\angle AOB = \alpha$; $\angle AOJ = \angle DAO$, так как $OJ \parallel DA$. Но из ΔDOA имеем $\angle DAO = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle DOA\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \alpha\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Поэтому из ΔAOJ имеем

$$\angle AJO = 180^\circ - \angle OAJ - \angle AOJ = 180^\circ - \alpha - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle AOJ.$$

Значит, $AJ = AO = R$, откуда $AE = AF = AJ$. Кроме того, точка J лежит на отрезке AC ($0 < 90^\circ - \frac{\alpha}{2} < 180^\circ - 2\alpha$). Таким образом, точка J однозначно определена условиями $J \in AC$, $AJ = AE$, поэтому осталось доказать, что J совпадает с точкой T – центром вписанной окружности ΔFEC. Имеем:

$$\angle FET = \frac{1}{2}\angle FEC,$$

$$\angle AEF = \frac{1}{2}\angle ECF \Rightarrow \angle AET = \frac{1}{2}\left(\angle ECF + \angle FEC\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \angle EFC\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle EAT \Rightarrow \angle ATE = 180^\circ - \angle AET - \angle EAT = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle EAT = \angle AET.$$

Отсюда $AT = AE$, и, значит, точка J совпадает с точкой T. Утверждение доказано.

3 (А.Халявин). Обозначим $P(x) = x^n + x^2 - 1$, $Q(x) = x^m + x - 1$. Если $m \le n$, то при $a > 1$ имеем $0 < a^m + a - 1 < a^n + a^2 - 1$ и, значит, число $\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ не целое. Поэтому $m > n$. Коэффициенты многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ – целые, и старший коэффициент у $P(x)$ равен 1, поэтому $Q(x) = R_1(x) \cdot P(x) + R_2(x)$, где $\deg R_2 < n = \deg P$ ($\deg f$ – степень многочлена f), и многочлены $R_1(x)$ и $R_2(x)$ имеют целочисленные коэффициенты. Далее, из равенства $\frac{Q(a)}{P(a)} = R_1(a) + \frac{R_2(a)}{P(a)}$ следует, что $\frac{Q(a)}{P(a)} \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow \frac{R_2(a)}{P(a)} \in \boldsymbol{Z}$. Но, так как степень многочлена R_2 меньше степени многочлена P, можно выбрать такое N, что $\left|R_2(a)\right| < P(a)$ при всех $a > N$. Если $R_2 \not\equiv 0$, то многочлен R_2 имеет конечное число корней, поэтому можно выбрать $M \ge N$ такое, что $R_2(a) \ne 0$ при $a > M$. Но тогда при $a > M$ число $\frac{R_2(a)}{P(a)} \in (-1; 0) \cup (0; 1)$ не является целым, что противоречит условию. Значит, $R_2 \equiv 0$. Поэтому нам нужно найти такие m и n, что многочлен $Q(x)$ делится на многочлен $P(x)$.

Если $Q(x) \vdots P(x)$, то любой корень многочлена $P(x)$ является корнем многочлена $Q(x)$. Но $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^n + x^2 = 1$. На отрезке [0; 1] функция $f(x) = x^n + x^2$ является возрастающей, $f(0) = 0$, $f(1) = 2 > 1$. Значит, $c^n + c^2 = 1$ при некотором $c \in (0; 1)$. Тогда $Q(c) = 0 \Rightarrow c^m + c = 1$. Но $c + c^{n+1} > c^2 + c^n$ при любом $c \in (0; 1)$, так как

$$c + c^{n+1} - c^2 - c^n = c\left(1 - c - c^{n-1} + c^n\right) = c(1-c)\left(1 - c^{n-1}\right) > 0.$$

Значит, $m \ne n + 1 \Rightarrow m \ge n + 2$. Тогда $m \ge 5$ при $n = 3$. Если $m = 5$, то $x^5 + x - 1 = \left(x^3 + x^2 - 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)$, т.е. пара $n = 3$, $m = 5$ подходит. При $m \ge 6$ получаем $c^6 + c < c^5 + c = 1$ ($c^5 + c = c^3 + c^2 = 1$), значит, пары $n = 3$, $m \ge 6$ не подходят.

Пусть теперь $n \ge 4$. Если n четно, то $P(c) = 0 \Rightarrow P(-c) = 0$, поэтому $Q(c) = Q(-c) = 0$, т.е. $c^m + c = 1$ и $(-c)^m - c = 1$. Это невозможно при нечетном m: $(-c)^m - c = -\left(c^m + c\right) = -1$. А при четном m получаем $c^m + c = 1$ и $c^m - c = 1 \Rightarrow c = 0$ – противоречие. Значит, n нечетно, т.е. $n \ge 5$.

Покажем теперь, что $m < 2n$. Пусть $c = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0; 1)$. Тогда $c^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2$, $c^n = 1 - c^2 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $c^m = 1 - c = \varepsilon$. Если $m \ge 2n$, то

$$\varepsilon = 1 - c = c^m \le c^{2n} = \left(2\varepsilon - \varepsilon^2\right)^2 \Leftrightarrow \varepsilon \le \varepsilon^2(2-\varepsilon)^2 \Leftrightarrow 1 \le \varepsilon(2-\varepsilon)^2 < 4\varepsilon \le 1,$$

если $\varepsilon \le \frac{1}{4}$. Значит, $\varepsilon > \frac{1}{4}$, но тогда

$$c < \frac{3}{4} \Rightarrow c^n + c^2 \le c^5 + c^2 \le \left(\frac{3}{4}\right)^5 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 < \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64} + \frac{9}{16} = \frac{63}{64} < 1$$

– противоречие.

Следовательно, $m < 2n$, т.е. $m = n + k$, где $2 \le k \le n - 1$. Тогда

$$x^m + x - 1 = x^n x^k + x - 1 = x^k\left(x^n + x^2 - 1\right) + (1-x)\left(x^k(1+x) - 1\right).$$

Поэтому из делимости $Q(x)$ на $P(x)$ следует, что $(1-x)\left(x^k(1+x) - 1\right) \vdots \left(x^n + x^2 - 1\right)$. Но многочлены $1 - x$ и $x^n + x^2 - 1$ взаимно просты, так как 1 не является корнем многочлена $x^n + x^2 - 1$. Значит, $x^k(1+x) - 1 \vdots x^n + x^2 - 1$, откуда $\deg\left(x^k(1+x) - 1\right) \ge \deg\left(x^n + x^2 - 1\right)$, т.е. $k + 1 \ge n \Leftrightarrow$