Огромная благодарность работавшим с командой тренерам А.Белову, С.Берлову, А.Глазырину, В.Дольникову, Д.Карпову, П.Кожевникову, А.Пояркову, М.Пратусевичу, А.Храброву, Г.Челнокову.

Всего на олимпиаде золотыми медалями были награждены 39 участников, и их вручала победителям британская принцесса Анна.

В неофициальном командном зачете значительных изменений по сравнению с прошлыми годами не произошло, и лучшие 20 команд расположились в следующем порядке:

	Очки	*Золото*	*Серебро*	*Бронза*
Китай	*212*	*6*	*0*	*0*
Россия	*204*	*6*	*0*	*0*
США	*171*	*4*	*1*	*0*
Болгария	*167*	*3*	*2*	*1*
Вьетнам	*166*	*3*	*1*	*2*
Ю.Корея	*163*	*1*	*5*	*0*
Тайвань	*161*	*1*	*4*	*1*
Румыния	*157*	*2*	*3*	*1*
Индия	*156*	*1*	*3*	*2*
Германия	*144*	*2*	*1*	*2*
Иран	*143*	*0*	*4*	*2*
Канада	*142*	*1*	*3*	*1*
Венгрия	*142*	*1*	*2*	*3*
Белоруссия	*135*	*1*	*2*	*3*
Турция	*135*	*1*	*1*	*4*
Япония	*133*	*1*	*4*	*1*
Казахстан	*133*	*0*	*3*	*3*
Израиль	*130*	*0*	*3*	*3*
Франция	*127*	*0*	*2*	*3*
Украина	*124*	*1*	*3*	*0*

В заключение хотелось бы выразить благодарность всем организациям и лицам, оказавшим поддержку в успешном выступлении команды России на XLIII ММО: Министерству образования РФ, Стипендиальному фонду Владимира Потанина, компании «Apple», Исполкому Союза правых сил, а также Ю.В.Прохорову.

Ниже приведены задачи олимпиады и их решения, предложенные нашими участниками.

Задачи олимпиады

1. Дано натуральное число n. Обозначим через T множество точек $(x; y)$ координатной плоскости, где x и y – неотрицательные целые числа такие, что $x + y < n$. Каждая точка из T окрашена в красный или синий цвет. Если точка $(x; y)$ красная, то все точки $(x'; y')$ из T, для которых $x' \le x$ и $y' \le y$, также красные. Назовем X-множеством множество из n синих точек, имеющих различные координаты x, а Y-множеством – множество из n синих точек, имеющих различные координаты y. Докажите, что количество X-множеств равно количеству Y-множеств.

(Колумбия)

2. Дана окружность Γ с центром O и диаметром BC. Пусть A – точка на Γ такая, что $0^\circ < \angle AOB < 120^\circ$, а D – середина дуги AB, не содержащей C. Прямая, проходящая через точку O параллельно DA, пересекает прямую AC в точке J. Серединный перпендикуляр к отрезку OA пересекает Γ в точках E и F. Докажите, что точка J – центр вписанной окружности треугольника CEF.

(Ю.Корея)

3. Найдите все пары натуральных чисел $m, n \ge 3$, для которых существует бесконечно много натуральных чисел a таких, что число

$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$

целое.

(Румыния)

4. Дано натуральное число n, большее 1. Обозначим через $d_1, d_2, \ldots, d_k$ все его делители так, что

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d \ = n .$$

Пусть $D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots d_{k-1} d_k$.

а) Докажите, что $D < n^2$.

б) Найдите все n, для которых D – делитель числа n^2.

(Румыния)

5. Найдите все функции $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такие, что

$$\big(f(x) + f(z)\big)\big(f(y) + f(t)\big) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

для всех действительных x, y, z, t.

(Индия)

6. На плоскости расположены окружности $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$, радиуса 1 каждая, с центрами $O_1, O_2, \ldots, O_n$ соответственно; $n \ge 3$. Известно, что любая прямая плоскости имеет общие точки не более чем с двумя из этих окружностей. Докажите, что

$$\sum_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{O_i O_j} \le \frac{(n-1)\pi}{4} .$$

(Украина)

Решения задач

1 (О.Стырт). Занумеруем точки множества T: $(i; j)$, где i – номер столбца, j – номер строки, $i \ge 0$, $j \ge 0$, $i + j < n$, т.е. $i + j \le n - 1$. Будем также считать точки $(i; -1)$ и $(-1; j)$ красными. Пусть m_i – число синих точек в i-м столбце. Тогда количество X-множеств равно произведению $P = \prod_{i=0}^{n-1} m_i$. Выберем некоторое $i_0 \in \{0, \ldots n-1\}$. Если $m_{i_0} = 0$, то все точки i_0-го столбца красные. Пусть $m_{i_0} > 0$. Рассмотрим наименьшее j_0 такое, что $(i_0; j_0)$ – синяя точка. Тогда, из определения, точка $(i_0; j)$ синяя, т.е. $j \ge j_0$. Также $i_0 + j \le n - 1$, т.е. $m_{i_0} = n - i_0 - j_0$.

Посмотрим, сколько раз число k, $1 \le k \le n$, встречается среди чисел m_i в произведении P. Это количество равно числу пар $\{i; j\}$ таких, что $i \ge 0$, $j \ge 0$, $i + j = n - k$, и при этом точка $(i; j)$ синяя, а точка $(i; j-1)$ красная. С другой стороны, из определения множества T точки $(i; j)$ и $(i; j-1)$ либо одноцветны, либо $(i; j)$ синяя, а $(i; j-1)$ красная. Значит, разность между числом синих точек $(i_0; j)$ и числом синих точек $(i_0; j-1)$ как раз равна числу пар $(i_0; j)$ таких, что $(i_0; j)$ синяя, а $(i_0; j-1)$ красная точка.

Итак, любое ненулевое число k встречается в произведении P ровно столько раз, какова разность между числом синих точек $(i; j)$, для которых $i + j = n - k$, и числом синих точек, для которых $i + j = n - k - 1$. Из симметрии этого выражения относительно i и j следует, что ненулевое k входит в произведение P ровно столько раз, сколько раз оно входит в произведение $Q = \prod_{j=0}^{n-1} l_j$, где l_j – количество синих точек в j-й строке, задающее количество Y-множеств.

Если же в P входит хотя бы один нулевой множитель, т.е. если $m_{i_0} = 0$ для некоторого i_0, то все точки $(i_0; j)$, в том числе и $(i_0; j_0)$, где $i_0 + j_0 = n - 1$, красные. Это означает,