

Ответ обоснуйте. Таблицами и калькулятором пользоваться не разрешается.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{12 - 6\sqrt{2}\operatorname{tg} x} = 3 \sin x - \frac{\sqrt{2}}{\cos x}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{x} \log_5 \left(\frac{10}{3} - 5^{-x} \right) > 1.$$

4. Для каждого значения параметра a определите количество решений уравнения $3x^2 + 4x = a|x + 2| + 4$ и найдите все эти решения.

5. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность. Прямая, параллельная стороне BC и касающаяся окружности, пересекает сторону AB в точке N так, что $AN = \frac{3}{8} AB$. Найдите радиус окружности, если площадь треугольника ABC равна 12.

6. Два лыжника бегут по кольцевой трассе длины S , $1/6$ часть которой проходит по стадиону, а оставшаяся часть – в лесу. Скорость первого лыжника на стадионе равна v , а в лесу равна $5v$. Скорость второго лыжника на стадионе равна $8v/5$, а в лесу равна $4v$. Лыжники стартуют одновременно и сначала пробегают часть трассы на стадионе. Через какое время один из них впервые обгонит другого?

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Определите, при каких значениях x числа $a_1 = \lg 4$, $a_2 = \lg(9^x + 5)$, $a_3 = \lg(9^x + 13)$, взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

2. Решите уравнение

$$2 + \cos \frac{3x}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{3x}{2} = 4 \sin^2 \frac{x}{4}.$$

3. Решите уравнение

$$(x^2 - 6x - 9)^2 = x(x^2 - 4x - 9).$$

4. Решите неравенство

$$\log_{0,3} \log_{0,8} \left(\frac{2x+1}{3x+2} \right) \leq 0.$$

5. В урне лежали белые и черные шары, их общее число не превышало 55. Число белых шаров относилось к числу черных как 3 : 2. После того как из урны вынули 4 шара, оказалось, что соотношение белых и черных шаров стало 4 : 3. Сколько шаров лежало в урне?

6. Через точку, взятую на одной стороне треугольника ABC , проведены прямые, параллельные двум другим сторонам. Эти прямые делят треугольник на два треугольника и параллелограмм. Площади треугольников равны 4 и 9. Найдите площадь параллелограмма.

Вариант 3

(олимпиада, все факультеты)

1. Решите уравнение

$$x^{\log_3 \frac{x}{147}} \cdot 21^{\log_3 7} = 1.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x} + 4x - 3}{x} \geq 2.$$

3. Решите уравнение

$$\log_2 \left(\cos 2x + \cos \frac{x}{2} \right) + \log_{1/2} \left(\sin x + \cos \frac{x}{2} \right) = 0.$$

4. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y+7x} - \sqrt{y+2x} = 4, \\ 2\sqrt{y+2x} - \sqrt{5x+8} = 2. \end{cases}$$

5. Сравните числа $5 \log_{4639} (4633) + 1$ и $6 \log_{4639} (4634)$. Ответ обоснуйте.

6. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на 3. Завод стал выпускать в день 11200 деталей. Сколько прессов было на заводе первоначально?

7. Угол при основании равнобедренного треугольника равен $\pi/6$. Построен круг радиуса $2/\sqrt{3}$ с центром в вершине треугольника, противолежащей основанию. Определите отношение площади общей части треугольника и круга к площади треугольника, если длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $\sqrt{7}$.

8. Найдите все пары чисел (x, y) , удовлетворяющих соотношению

$$\begin{aligned} \sqrt{2-|y|} (5 \sin^2 x - 6 \sin x \cos x - 9 \cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}) = \\ = (\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 - \frac{5}{4} \pi^2. \end{aligned}$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Два тела брошены у поверхности Земли с одинаковыми начальными скоростями под углами α и $90^\circ - \alpha$ к горизонту. Найдите отношение наибольшей высоты подъема первого тела $H_{1\max}$ к соответствующей величине $H_{2\max}$ для второго тела.

2. Шар массой M висит на легкой нерастяжимой нити. В шар попадает пуля массой m , летящая горизонтально со скоростью v , и застревает в нем. Угол наибольшего отклонения нити от вертикали α ($\alpha < \pi/2$). Найдите период гармонических колебаний, считая подвешенный на нити шар математическим маятником.

3. Каково должно быть сопротивление R (рис.1), чтобы сила тока через амперметр с внутренним сопротивлением R_A при перемещении ключа K из положения 1 в положение 2 изменилась на ΔI ? Схема питается от сети с напряжением U .

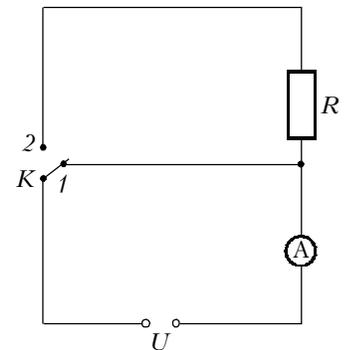


Рис. 1

4. В цилиндре под поршнем находится некоторая масса газа при температуре T_1 , занимающая при давлении p объем V_1 . Какой стала температура T_2 газа, если при неизменном давлении его объем уменьшился настолько, что при этом над газом была совершена работа A ?

5. На каком расстоянии f от объектива проекционного аппарата нужно поместить экран, чтобы изображение на