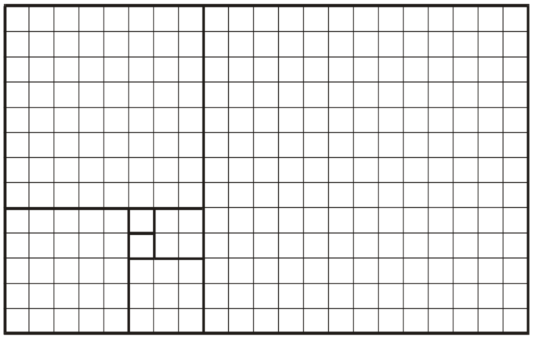

Рис. 7

ношения:

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\ldots+\varphi_n=\varphi_{n+2}-1,$$

$$\varphi_1+\varphi_3+\varphi_5+\ldots+\varphi_{2n-1}=\varphi_{2n},$$

$$\varphi_2+\varphi_4+\varphi_6+\ldots+\varphi_{2n}=\varphi_{2n+1}-1,$$

$$\varphi_{n+1}\varphi_{n-1}-\varphi_n^2=(-1)^n,$$

которые можно доказать методом математической индукции. Последнее соотношение открыл в 1680 году французский астроном Жан Доминик Кассини. При $n=6$ оно превращается в числовое равенство

$$13\cdot 5-8^2=1,$$

которое лежит в основе геометрического парадокса: на рисунке 8 шахматная доска разрезана на четыре части, из которых на рисунке 9 сложен прямоугольник размером 5×13. (Аналогичная конструкция при любом n разбивает квадрат со стороной φ_n на четыре части, из которых получается прямоугольник размером $\varphi_{n-1}\times\varphi_{n+1}$. Одна клетка либо теряется, либо возникает лишняя – в зависимости от четности n.) Разгадка парадокса проста: на рисунке 9 линии, соединяющие левый верхний угол с нижним правым углом, на самом деле образуют не отрезок, а незаметный для глаза параллелограмм.

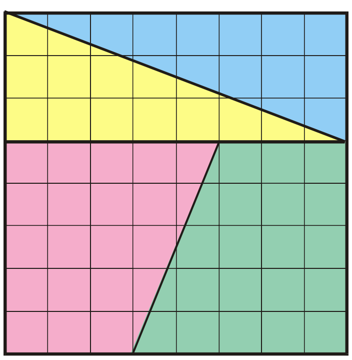

Рис. 8

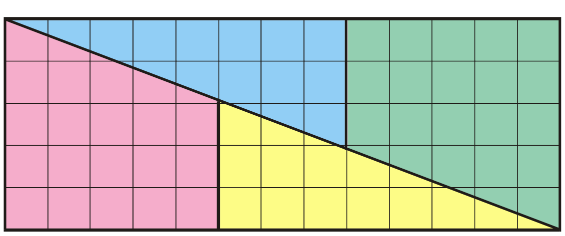

Рис. 9

Соотношение Кассини можно использовать и для других целей. Если заменить в нем φ_{n-1} на $\varphi_{n+1}-\varphi_n$, то оно примет вид

$$\varphi_{n+1}^2-\varphi_{n+1}\varphi_n-\varphi_n^2=(-1)^n.$$

Можно доказать, что никаких других решений в натуральных числах уравнение

$$x^2-xy-y^2=\pm 1$$

не имеет. В 1970 году это (и более сложные свойства) было использовано Ю.В.Матиясевичем при решении десятой проблемы Гильберта о несуществовании алгоритма, который решает задачу, имеет или нет уравнение вида $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$, где P – многочлен с целыми коэффициентами, решения в целых числах.

Много интересного в арифметике чисел Фибоначчи. Каждое третье число Фибоначчи четно; каждое четвертое кратно 3; каждое пятнадцатое оканчивается нулем; два соседних числа Фибоначчи взаимно просты; φ_n кратно φ_m в том и только том случае, когда n кратно m; наибольший общий делитель чисел φ_n и φ_m – число Фибоначчи с номером $\text{НОД}(m,n)$ (например, $\text{НОД}(\varphi_{12},\varphi_{18})=$
$=\text{НОД}(144,2584)=8=\varphi_6$).

Для доказательства последнего факта полезно тождество

$$\varphi_{m+n}=\varphi_m\varphi_{n-1}+\varphi_{m+1}\varphi_n,$$

которое можно доказать по индукции. Но мы разберем более интересное доказательство – выясним комбинаторный смысл этого тождества.

Рассмотрим для этого полоску из k клеток и задумаемся, сколько существует способов пройти из левой клетки полоски в правую клетку этой полоски, если каждым ходом разрешается переходить в соседнюю справа клетку или перепрыгивать через одну клетку. Очевидно, при $k=1$ идти некуда, да и не нужно; при $k=2$ нужно сделать ровно один шаг. Значит, при $k=1$ или 2 число способов равно 1. Для рассматриваемого числа способов выполнена в точности такая же рекуррентная формула, что и для чисел Фибоначчи. В самом деле, если первый шаг – сдвиг на 1 клетку, то остается полоска из $k-1$ клетки, если же первый шаг – сдвиг на 2 клетки, то остается полоска из $k-2$ клеток.

Итак, число способов пройти полоску – это число Фибоначчи. Осталось заметить, что все φ_{m+n} способов можно разбить на два типа: можно остановиться на $(m+1)$-й клетке (таких способов $\varphi_{m+1}\varphi_n$), а можно ее перепрыгнуть (таких способов $\varphi_m\varphi_{n-1}$).

В 1728 году Даниэль Бернулли опубликовал формулу

$$\varphi_n=$$
$$=\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n,$$

но о ней позабыли до 1843 года, когда она была вновь открыта французом Жаком Бине.

Из этой формулы следует, в частности, что φ_n растет примерно как геометрическая прогрессия со знаменателем $\tau=\left(1+\sqrt5\right)/2$, точнее, φ_n равно ближайшему к $\tau^n/\sqrt5$ целому числу.

А.Спивак