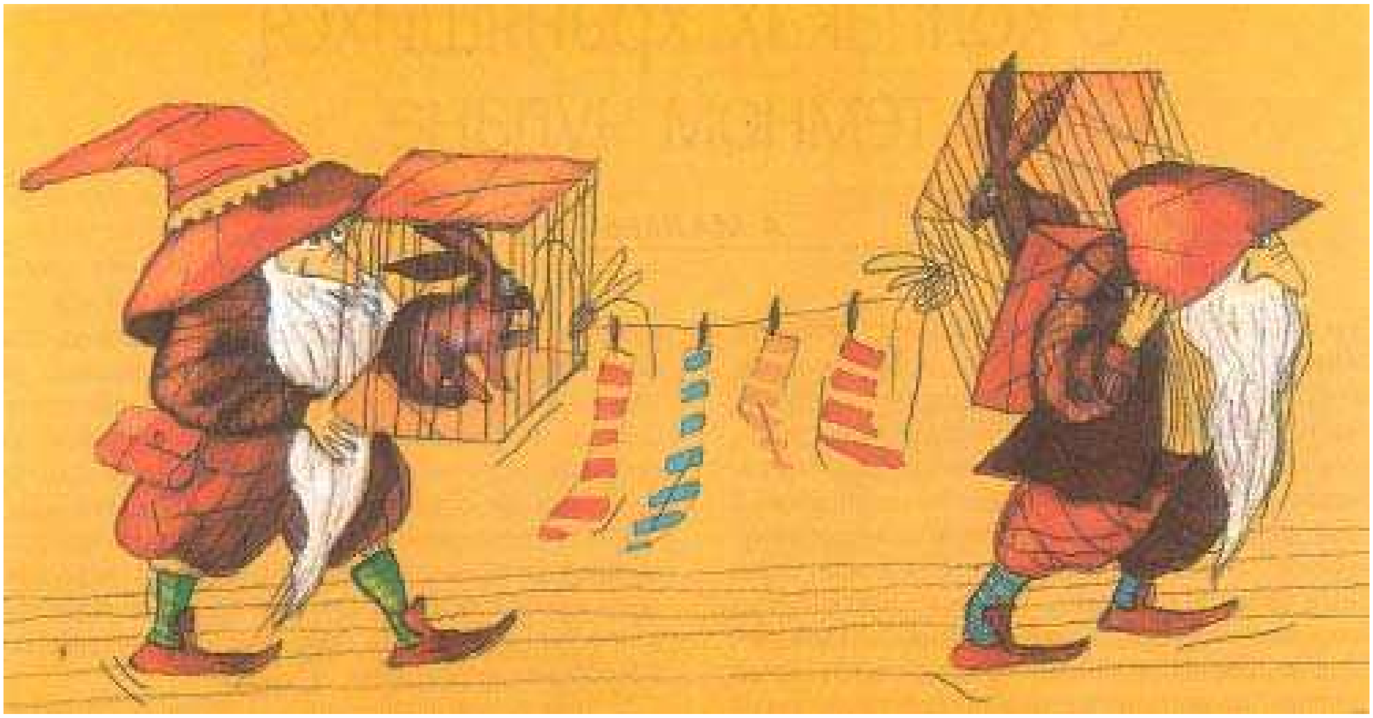

Иллюстрация В.Акатьевой

ложим, что принесенных Белоснежкой колпаков оказалось достаточно, чтобы выполнить просьбы первых k гномов, где k — некоторое число от 1 до $N-1$. В силу (1) и (2), из цепочки соотношений

$$s-\left(m_1+m_2+\ldots+m_k\right)\geq$$

$$\geq\ \left(m_1-1\right)n+1-\left(m_1+m_2+\ldots+m_k\right)=$$

$$=\ \left(m_{k+1}-1\right)n+1+\left(m_1-m_{k+1}\right)n-\left(m_1+m_2+\ldots+m_k\right)=$$

$$=\left(m_{k+1}-1\right)n+1+\left(m_1-m_{k+1}\right)\left(n-\frac{m_1+m_2+\ldots+m_k}{m_1-m_{k+1}}\right)\geq$$

$$\geq\left(m_{k+1}-1\right)n+1$$

вытекает, что

$$s-\left(m_1+m_2+\ldots+m_k\right)\geq\left(m_{k+1}-1\right)n+1.$$

Согласно принципу Дирихле, последнее неравенство показывает, что оставшихся колпаков хватит, чтобы выполнить и просьбу $(k+1)$-го гнома. Следовательно, если справедливы соотношения (1) и (2), то выполнена просьба 1-го гнома, а поэтому выполнена и просьба 2-го гнома, а поэтому выполнена и просьба 3-го гнома, и так далее, вплоть до последнего, N-го гнома. Но по условию задачи Белоснежка была вынуждена еще раз сходить в чулан, чтобы выполнить все просьбы. Отсюда заключаем, что число n должно быть подчинено неравенству

$$n<\max_{t=1,2,\ldots,N-1}\frac{m_1+m_2+\ldots+m_t}{m_1-m_{t+1}}. \qquad (3)$$

Рассмотрим величину, стоящую в правой части (3). Предположим, что максимум достигается при некотором $t=p$, т.е.

$$\frac{m_1+m_2+\ldots+m_p}{m_1-m_{p+1}}=\max_{t=1,2,\ldots,N-1}\frac{m_1+m_2+\ldots+m_t}{m_1-m_{t+1}}.$$

Пусть $m_1+\ldots+m_p=\left(m_1-m_{p+1}\right)q+r$, где $0\leq r<m_1-m_{p+1}$. Тогда наибольшее целое число, удовлетворяющее (3), есть

$$M=\begin{cases}q-1, & \text{если}\quad r=0,\\ q, & \text{если}\quad r>0.\end{cases} \qquad (4)$$

Отметим, что $M=0$ в том и только том случае, если $m_2=\ldots=m_N=0$. Но это невозможно, так как в этом случае Белоснежке незачем было бы идти в чулан второй раз. Следовательно, $M\geq 1$. Докажем, что число M и будет искомым ответом на вопрос задачи. Для этого нам достаточно построить подходящий пример. Итак, пусть в чулане имеются колпаки M цветов, причем каждого цвета имеется $m_1+m_2+\ldots+m_N$ колпаков. Этого заведомо хватает, чтобы выполнить просьбы всех гномов. Предположим, что Белоснежка в первый раз принесла из чулана $s=m_1+\ldots+m_p+M\left(m_{p+1}-1\right)$ колпаков. Сначала покажем, что этого количества наверняка хватит, чтобы выполнить просьбу первого гнома, т.е. докажем справедливость соотношения

$$m_1+\ldots+m_p+M\left(m_{p+1}-1\right)\geq\left(m_1-1\right)M+1,$$

или эквивалентного ему неравенства

$$M\leq\frac{m_1+\ldots+m_p-1}{m_1-m_{p+1}}=q+\frac{r-1}{m_1-m_{p+1}}.$$

Но последнее легко выводится из формулы (4). Далее, покажем, что принесенных колпаков может не хватить