в любом случае $\gamma = \dfrac{cR\cos\angle C}{2S}$, а так как $\cos\angle C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $R = \dfrac{abc}{4S}$, $S = rp$, то

$$\gamma = \frac{c^2\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16p^2r^2}.$$

Аналогично находятся α и β.

Таким образом,

$$O = \left(\frac{a^2\left(b^2+c^2-a^2\right)}{16p^2r^2}; \frac{b^2\left(a^2+c^2-b^2\right)}{16p^2r^2}; \frac{c^2\left(b^2+a^2-c^2\right)}{16p^2r^2}\right).$$

Траектория центра тяжести

Напомним, что *центром тяжести*, или *центроидом* треугольника, называется точка пересечения его медиан M. Поскольку прямые, соединяющие центр тяжести с вершинами, разрезают треугольник на три равновеликих треугольника, барицентрические координаты точки M равны $(1/3; 1/3; 1/3)$.

Подставляя координаты точек I, O, M в формулу (1), получаем после вычислений

$$IM^2 = \left(5r^2+p^2-16Rr\right)/9,$$

$$OM^2 = \left(9R^2+8Rr+2r^2-2p^2\right)/9.$$

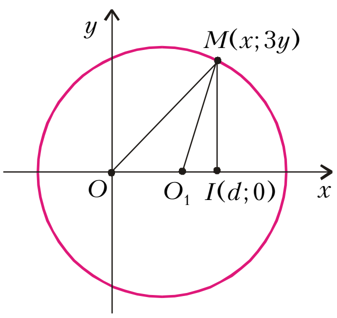

Рис. 5

Введем систему декартовых координат с центром в точке O и осью абсцисс, направленной вдоль прямой OI (рис.5), так что точка I имеет координаты $(d;\ 0)$. Исключив из выписанных соотношений p^2, получим уравнение

$$2IM^2 + OM^2 = \frac{3R^2-8Rr+4r^2}{3}. \quad (2)$$

Пусть $(x;\ y)$ – декартовы координаты точки M. Тогда

$$OM^2 = x^2+y^2,$$

$$IM^2 = (x-d)^2+y^2.$$

Подставим эти выражения в уравнение (2) и преобразуем его к виду

$$\left(x-\frac{2}{3}d\right)^2 + y^2 = \rho^2,$$

где $\rho = \left(\dfrac{R-2r}{3}\right)^2$.

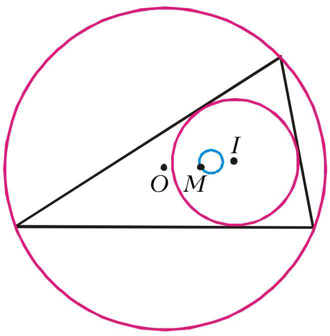

Рис. 6

Это уравнение окружности радиуса $\dfrac{R-2r}{3}$ с центром в точке O_1, делящей отрезок OI в отношении 2:1 (рис.6).

Одно геометрическое место точек

В предыдущем пункте нам пришлось встретиться с геометрическим местом точек M, для которых $2IM^2+OM^2 = \text{const}$, где I и O – фиксированные точки. Точно так же находится геометрическое место точек X, для которых

$$k_1IX^2 + k_2OX^2 = m^2,$$

где I и O – данные точки, k_1, k_2 – числа, а m – данный отрезок.

В самом деле, пусть $(x;\ y)$ – координаты точки X, тогда

$$OX^2 = x^2+y^2,$$

$$IX^2 = (x-d)^2+y^2.$$

По условию,

$$x^2 - \frac{2k_1dx}{k_1+k_2} + y^2 = \frac{m^2-k_1d^2}{k_1+k_2},$$

или (если $k_1+k_2 \neq 0$)

$$\left(x-\frac{k_1d}{k_1+k_2}\right)^2 + y^2 = U.$$

Отсюда видно, что при $U > 0$ получается окружность с центром $O_1\left(\dfrac{k_1d}{k_1+k_2}; 0\right)$; при $U = 0$ – точка O_1; при $U < 0$ – пустое множество, при этом точка O_1 лежит на прямой OI. Если же $k_1+k_2 = 0$, то геометрическим местом точек X является прямая, перпендикулярная прямой OI.

Траектория ортоцентра

Ортоцентр H, т.е. точка пересечения высот треугольника, имеет барицентрические координаты

$$\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)/\left(16p^2r^2\right),$$

$$\left(c^2+b^2-a^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)/\left(16p^2r^2\right),$$

$$\left(c^2+a^2-b^2\right)\left(c^2+b^2-a^2\right)/\left(16p^2r^2\right).$$

Однако для определения траектории ортоцентра удобнее воспользоваться теоремой Эйлера, утверждающей, что точки H, M и O лежат на одной прямой (прямая Эйлера), причем $HM = 2MO$. Поскольку M движется по окружности, а точка O неподвижна, то точка H тоже движется по окружности, гомотетичной окружности, по которой движется центр тяжести, с коэффициентом 3 (рис.7).

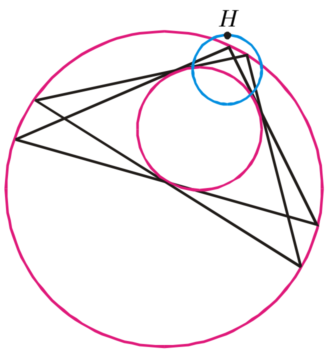

Рис. 7

Упражнение 6. Докажите формулу для барицентрических координат ортоцентра и, пользуясь условиями принадлежности трех точек одной прямой, докажите теорему Эйлера.

Точка Жергонна

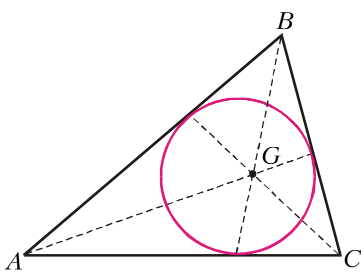

Рис. 8

Точкой Жергонна называется точка G пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания вписанной окружности (рис.8). Ее барицентрические координаты –

$$(p-b)(p-c)/\left(r^2+4Rr\right),$$

$$(p-a)(p-c)/\left(r^2+4Rr\right),\ (p-b)(p-a)/\left(r^2+4Rr\right).$$