В уже упомянутой книге И.Ф.Шарыгина и в статье В.Дубровского и В.Сендерова «Ловушка для треугольника» («Квант» № 3 за 1999 г.) доказано, например, что центр тяжести треугольника движется по некоторой окружности. Мы решим эту задачу и исследуем траектории других замечательных точек треугольника Понселе.

Барицентрические координаты

Барицентрические координаты точек плоскости могут оказаться полезными при решении многих геометрических задач. В дальнейшем они будут основным аппаратом наших исследований.

Определение. *Пусть дан треугольник ABC и точка X. Барицентрическими координатами X относительно ABC называются числа* $\alpha = S_{BCX}/S_{ABC}$, $\beta = S_{ACX}/S_{ABC}$, $\gamma = S_{ABX}/S_{ABC}$, *причем если X лежит вне треугольника, то площади треугольников, не имеющих с ABC общих внутренних точек, считаются отрицательными, так что сумма трех координат равна 1.*

Нетрудно убедиться, что барицентрические координаты любой точки определены однозначно, и, напротив, любые три числа α, β, γ, сумма которых равна единице, однозначно определяют точку на плоскости.

Поскольку отношение площадей двух треугольников с общим основанием равно отношению их высот, барицентрические координаты равны отношениям расстояний от точки X до прямых BC, AC и AB к соответствующим высотам треугольника ABC, но взятым с соответствующим знаком.

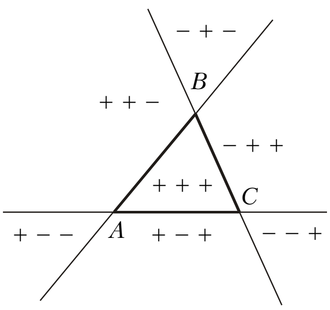

Рис. 4

Например, координата α положительна, если точки A и X лежат по одну сторону от прямой BC, равна нулю, если точка X лежит на BC, и отрицательна, если A и X находятся по разные стороны от BC. На рисунке 4 показаны знаки чисел α, β, γ в зависимости от положения точки X.

Пусть даны точки X_1 и X_2 с координатами $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ и $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ соответственно, а Y − точка с координатами $(\alpha; \beta; \gamma)$, принадлежащая отрезку X_1X_2. Тогда

$$\alpha = \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2, \quad \beta = \lambda\beta_1 + (1-\lambda)\beta_2, \quad \gamma = \lambda\gamma_1 + (1-\lambda)\gamma_2,$$

где

$$\lambda = \frac{YX_2}{X_1X_2}.$$

Упражнение 1. Докажите это утверждение.

В дальнейшем нам также понадобится формула, выражающая расстояние d между двумя точками через их барицентрические координаты $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ и $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$:

$$d^2 = -\Big((\alpha_1-\alpha_2)(\beta_1-\beta_2)c^2 + (\alpha_1-\alpha_2)(\gamma_1-\gamma_2)b^2 + (\beta_1-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_2)a^2\Big). \quad (1)$$

Доказательство формулы (1) проводится с помощью несложных, но довольно длинных вычислений. Провести их вы сможете самостоятельно, решив следующие упражнения.

Упражнения

2. Пусть точка X имеет координаты $(\alpha; \beta; \gamma)$. Тогда $\overrightarrow{AX} = \gamma\vec{b} - \beta\vec{c}$, где $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BA}$.

3. Пусть $\vec{u} = \overrightarrow{X_1X_2}$. Вычислите скалярное произведение $u^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$, пользуясь тем, что, по предыдущему упражнению,

$$\vec{u} = \overrightarrow{AX_2} - \overrightarrow{AX_1} = (\gamma_2-\gamma_1)\vec{b} - (\beta_2-\beta_1)\vec{c}.$$

Преобразуйте полученное выражение с помощью соотношений $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Симметрические функции

Многочлен $f(a,b,c)$ называется *симметрическим*, если он не меняется при любой перестановке аргументов a, b, c. Можно доказать (мы не будем здесь этого делать), что $f(a,b,c)$ можно выразить через основные симметрические многочлены

$$\sigma_1 = a+b+c, \quad \sigma_2 = ab+ac+bc, \quad \sigma_3 = abc.$$

Например,

$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b = (a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3.$$

Упражнение 4. Выразите через σ_1, σ_2 и σ_3 функции а) $a^2+b^2+c^2$; б) $a^3+b^3+c^3$.

Из формулы (1) следует, что для замечательных точек X_1 и X_2 треугольника расстояние X_1X_2 является симметрической функцией длин сторон a, b, c. Это замечание дает возможность выразить расстояние X_1X_2 через σ_1, σ_2, σ_3. В свою очередь, функции σ_1, σ_2, σ_3 могут быть выражены через полупериметр p и радиусы R и r. Прежде всего,

$$\sigma_1 = a+b+c = 2p$$

по определению. Далее,

$$\sigma_2 = ab+ac+bc = p^2+r^2+4Rr,$$

$$\sigma_3 = abc = 4Rpr.$$

Выражение для σ_3 очевидным образом получается из двух формул для площади S треугольника: $S = rp$ и $S = \frac{abc}{4R}$.

Упражнение 5. Докажите формулу для σ_2. *Указание*. Воспользуйтесь формулой Герона $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Итак, расстояния между любыми двумя замечательными точками треугольника могут быть выражены через функции от p, r и R. Для этого нужно вычислить барицентрические координаты замечательных точек. Нас главным образом будут интересовать расстояния точек O и I до других замечательных точек.

Барицентрические координаты точек *O* и *I*

Здесь мы вычислим барицентрические координаты «основных» точек − центров вписанной и описанной окружностей.

Прежде всего, $I = \left(\frac{a}{2p}; \frac{b}{2p}; \frac{c}{2p}\right)$. Для доказательства достаточно заметить, что $S_{ABC} = rp$, а $S_{ABI} = \frac{1}{2}rc$, поэтому $\gamma = \frac{c}{2p}$. Аналогично, $\alpha = \frac{a}{2p}$, $\beta = \frac{b}{2p}$.

Для вычисления координат точки O заметим, что $S_{ABO} = \frac{1}{2}cR\left|\cos\angle C\right|$. В самом деле, если угол C острый, то $\angle AOB = 2\angle C$, но тогда высота равнобедренного треугольника AOB, опущенная на сторону AB, равна $R\cos\angle C$. Аналогично, если угол C тупой, то $\angle AOB = 2\pi - 2\angle C$, но тогда высота треугольника AOB равна $-R\cos\angle C$. Поэтому