Траектории замечательных точек треугольника Понселе

А.ЗАСЛАВСКИЙ, Д.КОСОВ, М.МУЗАФАРОВ

Одной из наиболее сложных и красивых теорем геометрии является теорема Понселе. Приведем ее формулировку.

Теорема 1. *Пусть окружность* β *лежит внутри окружности* α. *Из точки A окружности* α *проведем касательную к окружности* β *и отметим вторую точку* A_1 *(рис.1) ее пересечения с окружностью* α. *Из точки* A_1 *снова проведем касательную к окружности* β *и отметим точку* A_2 *ее пересечения с* α. *Аналогично получаются точки* A_3, A_4, … *Если окажется, что* $A_n = A$, *то для всякой другой точки* $\widetilde{A}$ *окружности* α *точка* $\widetilde{A}_n$ *совпадает с* $\widetilde{A}$.

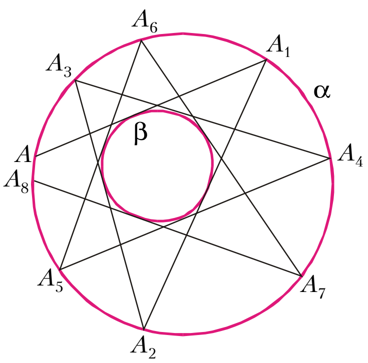

Рис. 1

Доказательство теоремы Понселе для любого n можно найти, например, в задачнике И.Ф.Шарыгина «Геометрия. Задачник, 9 – 11 кл. Учебное пособие» (М.: Дрофа, 1996), задачи 614 – 615. Впрочем, нас будет интересовать только случай $n = 3$.

Теорема Понселе для $n = 3$

Прежде чем доказывать теорему Понселе для треугольника, докажем формулу Эйлера, связывающую радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника с расстоянием между их центрами.

Теорема 2. *Пусть R – радиус описанной около треугольника ABC окружности, r – радиус вписанной в него окружности, а d – расстояние между центрами этих окружностей. Тогда*

$$d^2 = R^2 - 2Rr .$$

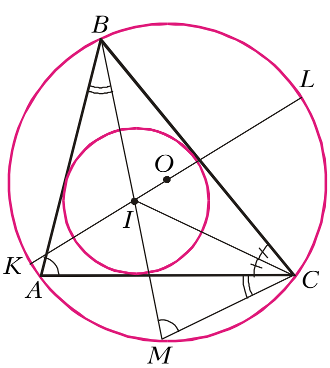

Рис. 2

Доказательство. Пусть O и I – центры описанной и вписанной окружностей соответственно (рис. 2). Через точки O и I проведем диаметр KL описанной окружности и продлим биссектрису угла B до пересечения с описанной окружностью в точке M. Тогда

$$MI \cdot BI = KI \cdot LI = (R-d)(R+d). \quad (*)$$

Заметим, что треугольник MCI равнобедренный, причем $MC = MI$. В самом деле, по теореме о вписанных углах,

$$\angle CMI = \angle A, \quad \angle MCA = \angle CBM = \frac{1}{2}\angle B .$$

Поэтому

$$\angle MCI = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = \frac{\pi - \angle A}{2} .$$

Но тогда

$$\angle MIC = \pi - \angle A - \frac{\pi - \angle A}{2} = \frac{\pi - \angle A}{2} = \angle MCI .$$

По теореме синусов

$$MI = MC = 2R\sin\frac{\angle B}{2} .$$

В то же время $BI = r / \sin\frac{\angle B}{2}$. Подставляя в $(*)$ выражения для MI и BI, получаем, что

$$2Rr = R^2 - d^2 ,$$

но это и требовалось доказать.

Пусть теперь α – описанная, а β – вписанная окружности треугольника ABC. Возьмем произвольную точку A' на окружности α и проведем из нее две касательные к окружности β (рис.3). Пусть B' и C' – точки пересечения этих касательных с окружностью α, отличные от точки A'. Докажем, что $B'C'$ касается окружности β.

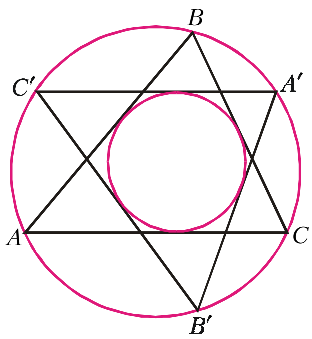

Рис. 3

Предположим, что это не так. Будем теперь, сохраняя центр меньшей окружности, непрерывно менять ее радиус до тех пор, пока касание не будет достигнуто (если $B'C'$ пересекает окружность, радиус ее надо уменьшать, если нет – увеличивать). Когда $B'C'$ коснется окружности, возникнет противоречие с формулой Эйлера: у треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают R и d, а радиусы вписанных окружностей – нет.

Тем самым теорема Понселе для треугольника доказана.

Теперь представим себе, что вершина A движется по окружности α. Движущийся таким образом треугольник будем называть треугольником Понселе. Тогда замечательные точки [1] треугольника ABC тоже движутся по некоторым линиям.

[1] *Замечательной точкой мы считаем такую точку в плоскости треугольника, определение которой не зависит от того, в каком порядке берутся стороны треугольника. Таковы, например, точки пересечения медиан, высот, биссектрис и т.п.*