Из теоремы следует, что достаточно доказать два неравенства:

$$f(y) \ge 0 \qquad (1)$$

и

$$f'(x) \ge 0 \text{ при } x > y. \qquad (2)$$

Эти неравенства почти очевидны. В самом деле, (1), или

$$f_1(y) = y^4 - 4z^3y + 3z^4 \ge 0 \text{ при } y \ge z \ge 0, \qquad (3)$$

можно переписать в виде

$$t^4 - 4t + 3 \ge 0 \text{ при } t \ge 1. \qquad (4)$$

А теперь осталось разделить левую часть на $t - 1$:

$$\left(t^4 - 1\right) - 4(t-1) = (t-1)\left(\left(t^2+1\right)(t+1) - 4\right).$$

Неравенство доказано.

Можно поступить и по-другому: применить теорему еще раз, к неравенству (3) (либо (4)). Применим:

$$f_1(z) = 0 \text{ и } f_1'(y) = 4y^3 - 4z^3 > 0 \text{ при } y > z.$$

Теперь докажем неравенство (2), или (после очевидных упрощений)

$$f_2(x) = \left(y^6 + z^6 - 2y^3z^3\right)x^3 + \\ + 2y^4z^4x - y^3z^3\left(y^3+z^3\right) \ge 0.$$

Поскольку $f_2(x)$ возрастает, то достаточно доказать $f_2(y) \ge 0$, или

$$f_3(y) = y^4 - 3z^3y + 2z^4 \ge 0 \text{ при } y \ge z \ge 0, \qquad (5)$$

– что абсолютно аналогично доказательству (3).

Заметим еще, что (5) можно и не доказывать: поскольку $f_1(y) \ge 0$, то и

$$f_3(y) = f_1(y) + z^3y - z^4 \ge 0.$$

Ф.Шлейфер, В.Сендеров

М1835. *Около четырехугольника можно описать окружность и в него можно вписать окружность. Через центр вписанной окружности проведена прямая, параллельная какой-либо стороне четырехугольника, две его противоположные стороны отсекают на ней отрезок. Докажите, что длина отсекаемого отрезка равна четверти периметра четырехугольника.*

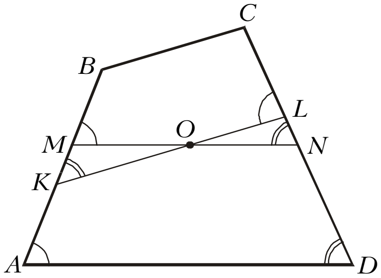

Рис. 2

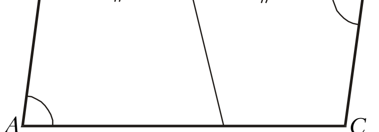

Рис .2

Отрезок MN проходит через центр O вписанной в четырехугольник $ABCD$ окружности параллельно стороне AD, отрезок KL тоже проходит через O, но параллельно стороне BC (рис.1). Нам нужно показать, что $2MN = AD + BC$. Этого будет достаточно, ввиду того, что в четырехугольник можно вписать окружность.

Замечаем равенство $\angle OMB = \angle OLC$, а значит, $OM = OL$. Далее, $\angle OKB = \angle ONC$, а значит, $OK = ON$. Таким образом, $MN = KL$.

Трапеции $AMND$ и $BCLK$ имеют равные высоты и $\angle ADN + \angle CBK = 180^\circ$. Значит, из трапеций можно сложить параллелограмм $AMLC$ (рис.2). Откуда следует, что $2MN = AD + BC$.

В.Произволов

М1836. *Гидры состоят из голов и шей (любая шея соединяет ровно две головы). Одним ударом меча можно снести все шеи, выходящие из какой-то головы А гидры. Но при этом из головы А мгновенно вырастает по одной шее во все головы, с которыми А не была соединена. Геракл побеждает гидру, если ему удастся разрубить ее на две не связанные шеями части. Найдите наименьшее N, при котором Геракл сможет победить любую стошеюю гидру, нанеся не более чем N ударов.*

Ответ: 10.

Перейдем к графу, в котором головы – вершины, шеи – ребра, а удар по шеям, выходящим из головы A, назовем инвертированием вершины A. Тогда если есть вершина X степени не больше 10, то достаточно инвертировать ее соседей, и она отделится, т.е. эта вершина не будет соединена с остальными вершинами графа. Если есть вершина, соединенная со всеми вершинами, за исключением n ($n \le 9$), то нужно инвертировать сначала эту вершину, а затем те n вершин, с которыми она вначале не была соединена, и тогда эта вершина отделится. Если же для каждой вершины есть хотя бы 11 соединенных с ней вершин и хотя бы 10 не соединенных с ней, то всего вершин не меньше 22, а ребер не меньше $22 \cdot 11 > 100$.

Приведем пример гидры, которую нельзя разрубить за 9 ударов: две группы по 10 голов и 100 шей, соединяющих все пары голов из разных групп.

Действительно, пусть нанесено не более 9 ударов. Тогда в каждой группе осталось по неотрубленной голове, и поэтому есть шея из одной группы в другую. С другой стороны, каждая неотрубленная голова связана со всеми отрубленными в своей группе. Поэтому, если в каждой части отрублено хотя бы по голове, то гидра осталась связной. Легко видеть, что если отрублено 9 голов в одной части, то гидра тоже осталась связной.

Ю.Лифшиц

М1837. *Докажите, что для любого натурального числа $n > 10000$ найдется такое натуральное число m, представимое в виде суммы двух квадратов, что $0 < m - n < 3\sqrt[4]{n}$.*

Пусть x – наибольшее целое число, квадрат которого не превосходит n: $x^2 \le n < (x+1)^2$. Так как n – целое, $n - x^2 \le 2x \le 2\sqrt{n}$. Пусть, далее, y – наименьшее натуральное число, квадрат которого больше $n - x^2$:

$$(y-1)^2 \le n - x^2 < y^2.$$

Тогда

$$y = (y-1) + 1 \le \sqrt{n - x^2} + 1 \le \sqrt{2\sqrt{n}} + 1 = \sqrt{2}\sqrt[4]{n} + 1.$$

Ясно, что $m = x^2 + y^2 > n$, т.е. m представимо в виде суммы двух квадратов, и $m - n > 0$.