Шаг 3. Рассмотрим, наконец, цепочку Штейнера $C_1, C_2, \ldots$ Она может быть замкнутой (в этом случае имеем ожерелье) либо незамкнутой; рассуждения этого шага одинаково пригодны для обоих случаев. Пусть r_k — радиус окружности C_k; положим $\rho_k = r_k^{-1}$. Из результата Шага 2 вытекает, что последовательность ρ_k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет соотношению

$$\rho_{k-1} + \rho_{k+1} - 2E\rho_k = F,\ k = 2, 3, \ldots \qquad (14)$$

Сейчас мы изучим это соотношение, временно забыв о геометрическом смысле величин ρ_k. Соотношение вида (14) называется рекуррентным, а также возвратным, а любая последовательность, удовлетворяющая ему, называется его решением. Найдем все решения соотношения (14).

Во-первых, очевидным решением является постоянная последовательность $\nu_k = F\left(2(1-E)\right)^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots$ Рассмотрим далее последовательность $\tau_k = \rho_k - \nu_k = \rho_k - F\left(2(1-E)\right)^{-1}$. Ясно, что она удовлетворяет соотношению $\tau_{k-1} + \tau_{k+1} - 2E\tau_k = 0$.

Чтобы найти его решения, возьмем такое $\alpha \in [0; \pi]$, что $\cos\alpha = E$; существование такой величины α вытекает из (12). Приходим к соотношению

$$\tau_{k-1} + \tau_{k+1} - 2\tau_k \cos\alpha = 0.$$

Для любых A, β последовательность $\tau_k = A\cos(\alpha k + \beta)$ есть решение этого соотношения, что видно из известных формул для тригонометрических функций. Возвращаясь к соотношению (14), получаем следующее: для любых чисел A, β последовательность вида

$$\rho_k = A\cos(\alpha k + \beta) + F\left(2(1-E)\right)^{-1},\ k = 1, 2, \ldots \qquad (15)$$

является его решением. Покажем, что любое решение соотношения (14) можно представить в виде (15) (при подходящем выборе чисел A, α). Действительно, возьмем любое решение соотношения (14) и такие A и α, что первый и второй члены этого решения выражаются формулой (15), записанной для $k = 1$ и $k = 2$; читатель легко найдет такие A, α. Из соотношения (14) следует, что и все дальнейшие члены указанного решения выражаются формулой (15). Итак, найдены все решения соотношения (14). В дальнейшем будем считать, что $A > 0$; этого можно добиться, заменив β на $\beta + \pi$.

Вспомним теперь, что числа ρ_k возникли из цепочки Штейнера, а потому удовлетворяют еще и условиям (11). Подставив (15) в (11) и произведя упрощения (щадя читателя, опускаем их), получаем равенство

$$A = 2c\left((a-b+c)(a-b-c)\right)^{-1}.$$

А поскольку $\rho_k = r_k^{-1}$, приходим к следующему выводу.

Теорема 2. *Пусть $C_1, C_2, \ldots$ – ожерелье Штейнера, r_k — радиус окружности C_k, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда существует такое число β, что*

$$r_k = \frac{(a-b+c)(a-b-c)}{2\left(c\cos(\alpha k + \beta) + a - b\right)},\ k = 1, 2, \ldots \qquad (16)$$

Напомним, что число α полностью определено радиусами закрепленных окружностей и расстояниями между их центрами по формуле

$$\cos\alpha = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + 6ab}{(a+b+c)(a+b-c)}.$$

Шаг 4. Выведем из теоремы 2 теорему Штейнера. Пусть число α соизмеримо с π, т.е. $\alpha = \frac{m}{n}\pi$, где m, n — взаимно простые целые числа, $n > 0$. Тогда, как видно из равенства (16), $r_{k+2n} = r_k$ для всех k, если m нечетно, и $r_{k+n} = r_k$, если m четно. Таким образом, цепочка Штейнера замкнулась, и получилось ожерелье Штейнера. Оно составлено из $2n$ окружностей, если m нечетно, и из n окружностей, если m четно (при любом выборе числа β). Если же α и π не соизмеримы (число α/π иррационально), то цепочка не замкнется. Мы получили, во-первых, явный признак того, что цепочка Штейнера замкнется, и, во-вторых, указали число окружностей в ожерелье Штейнера. Это и есть обещанное уточнение теоремы Штейнера.

Немного истории и нравоучений

То, что изложено в предыдущем разделе, было получено мной в 1954 году, в летние каникулы после девятого класса средней школы. Разумеется, я не знал тогда, что эта задача была поставлена и решена Я.Штейнером еще в девятнадцатом веке. Не знал я также об инверсии и о решении рекуррентных соотношений. Но это – тот случай, когда незнание оказалось благом. Ведь что было бы, если бы кто-то поспешил сообщить мне все эти сведения? Я лишился бы пары восхитительных недель, наполненных тем, что составляет творчество: это и острое любопытство (замкнется или не замкнется цепочка окружностей?), и упорные вычисления, и счастливая идея применения формулы Виета, и финальная формула (16), заключающая решение загадки. Мне повезло: в сельской школе 1954 года никому и не снилось наблюдаемое сегодня мельтешение кружков и олимпиад, профильных школ и лицеев, «Шагов в будущее» (есть и такие!) и пр. и пр. Известная истина: самостоятельное творчество – вещь более ценная, чем сумма знаний, а к творчеству побуждает скорее здоровый интеллектуальный голод, нежели пресыщение.

Этим нравоучением я и закончу. Да не покинут чувство меры и здравый смысл того читателя, который пожелает применить его к себе!