догадывается, что все дело в каком-то механизме, скрытом внутри; его разбирает любопытство: а что же там, внутри, происходит? В нашем случае, можно догадываться, все дело в некоторой закономерности, которой подчинены радиусы окружностей, составляющих цепочку Штейнера. Сейчас мы вскроем эту закономерность и, таким образом, заглянем внутрь механизма, управляющего цепочкой (и ожерельем) Штейнера.

Вычислительное доказательство

Итак, имеем пару закрепленных окружностей (неконцентрических) и ограниченное ими кольцо. Пусть $a > b > 0$ – радиусы этих окружностей, $c > 0$ – расстояние между их центрами. Ясно, что $b + c < a$. Цепочки Штейнера пока нет; она появится позже. Рассуждение, которое приведет к доказательству теоремы Штейнера (и даже к некоторому ее уточнению), разобьем на шаги.

Шаг 1. Впишем в кольцо пару окружностей так, что обе они касаются закрепленных окружностей и касаются друг друга. Пусть r_1, r_2 – радиусы этих окружностей. Цель этого шага – найти зависимость между r_1 и r_2.

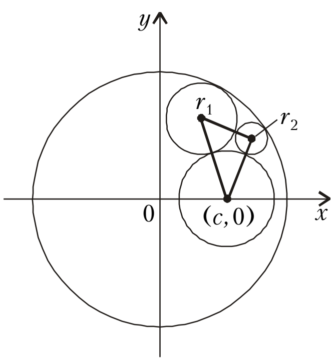

Рис. 2

Введем на плоскости декартовы координаты $x0y$, причем центры закрепленных окружностей пусть имеют координаты (0; 0) и (c; 0), а точки с координатами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ – центры двух только что построенных окружностей (рис.2). Выразив расстояния между центрами окружностей через их координаты, получаем систему уравнений

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (r_1 + r_2)^2, \qquad (1)$$

$$x_1^2 + y_1^2 = (a - r_1)^2, \qquad (2)$$

$$x_2^2 + y_2^2 = (a - r_2)^2, \qquad (3)$$

$$(x_1 - c)^2 + y_1^2 = (b + r_1)^2, \qquad (4)$$

$$(x_2 - c)^2 + y_2^2 = (b + r_2)^2. \qquad (5)$$

Исключим из них x_i, y_i, $i = 1, 2$. Во-первых, из (2), (4) (а затем из (3), (5)) получаем (путем вычитания и последующего деления на $2c$) равенства

$$x_i = \frac{a^2 + c^2 - b^2 - 2(a+b)r_i}{2c}. \qquad (6)$$

Далее, сложив (2), (3) и вычтя сумму из (1), приходим к равенству

$$x_1x_2 + y_1y_2 = a^2 - a(r_1 + r_2) - r_1r_2. \qquad (7)$$

В этом равенстве перенесем вправо слагаемое x_1x_2, возведем в квадрат обе части полученного равенства и заменим y_1^2, y_2^2 выражениями, получаемыми из (2) и (3). Это приводит (после упрощений) к равенству

$$(a - r_2)^2 x_1^2 + (a - r_1)^2 x_2^2 - 2x_1x_2\left(a^2 - a(r_1 + r_2) - r_1r_2\right) = $$
$$= 4ar_1r_2(a - r_1 - r_2). \qquad (8)$$

Наконец, заменив в нем величины x_i, $i = 1, 2$, правыми частями равенств (6), получаем (разумеется, после упрощений) следующую связь между r_1 и r_2 (любите вычисления, читатель!):

$$r_1^2 + r_2^2 - 2\frac{c^2 - a^2 - b^2 + 6ab}{(a+b)^2 - c^2}r_1r_2 -$$
$$- \frac{8(a-b)}{(a+b)^2 - c^2}r_1r_2(r_1 + r_2) + \frac{16(a+b)^2}{\left((a+b)^2 - c^2\right)^2}r_1^2r_2^2 = 0. \qquad (9)$$

Это уравнение несколько упрощается, если от радиусов r_k, $k = 1, 2$, перейти к обратным величинам $\rho_k = r_k^{-1}$, $k = 1, 2$, и ввести величины

$$E = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + 6ab}{(a+b)^2 - c^2}, \quad F = \frac{8(a-b)}{(a+b)^2 - c^2},$$
$$G = \frac{16(a+b)^2}{\left((a+b)^2 - c^2\right)^2}. \qquad (10)$$

Тогда уравнение (9) перепишется в виде

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2E\rho_1\rho_2 - F(\rho_1 + \rho_2) + G = 0. \qquad (11)$$

Подчеркнем, что величины E, F, G зависят только от радиусов и взаимного расположения закрепленных окружностей, а потому фиксированы; величины ρ_i, $i = 1, 2$, связанные уравнением (11), – переменные (пара вписанных окружностей может скользить внутри кольца, сохраняя взаимное касание). Равенство (11) и было целью Шага 1. Оно отнюдь не выглядит обнадеживающим.

В дальнейшем нам понадобятся неравенства

$$-1 \le E \le 1; \qquad (12)$$

читатель без труда докажет их, используя уже упомянутое неравенство $a > b + c$.

Шаг 2. Пусть теперь в кольцо вписаны три окружности с радиусами r_k, $k = 1, 2, 3$, причем вторая (с радиусом r_2) касается первой и третьей. Положим, как и выше, $\rho_k = r_k^{-1}$, $k = 1, 2, 3$. Сейчас мы выведем соотношение, связывающее величины ρ_k. С этой целью заменим в уравнении (11) величину ρ_1 независимой переменной x. Получим квадратное уравнение. Ясно (здесь требуется минутное размышление!), что его корнями являются ρ_1, ρ_3. Но тогда, согласно формуле Виета для суммы корней квадратного уравнения, справедливо равенство

$$\rho_1 + \rho_3 = 2E\rho_2 + F. \qquad (13)$$

Это соотношение и было целью Шага 2.