Материалы вступительных экзаменов 2002 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, май)

1. Найдите дроби $\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}$ и $\frac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$, если числа α, β и γ выбраны так, что обе дроби положительны и одна из них втрое больше другой.

2. Решите неравенство

$$\sqrt[3]{2x-x\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{1-2x}\le 0.$$

3. Точка M лежит на боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Известно, что $\angle BCD=\angle CBD=\angle ABM=\arccos\frac{5}{6}$ и $AB=9$. Найдите BM.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+1}x+\log_x(19-8a)=2$$

имеет по крайней мере два корня и при этом произведение всех его корней не меньше 0,01.

5. Сфера высекает на ребрах AB, CB, AS и CS треугольной пирамиды $SABC$ равные отрезки KL, NM, K_1L_1 и N_1M_1 соответственно (точки K и K_1 лежат ближе к A, чем L и L_1, а точки N и N_1 лежат ближе к C, чем M и M_1). Известно, что $MM_1=2KK_1$ и $2KN=3L_1M_1$, $\angle SBA=\angle SBC$ и $\angle KK_1N_1=90^\circ$. Найдите отношение объемов пирамид $SABC$ и M_1KLMN.

6. При каких x оба числа $\frac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$ и $\frac{1-x}{1+x}$ целые?

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{2}{3}}\frac{x}{x+1}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{3x}\ge 2.$$

2. Три сферы, радиусы которых соответственно равны $\sqrt{6}$, 1 и 1, попарно касаются друг друга. Через прямую, содержащую центры A и B второй и третьей сфер, проведена плоскость γ так, что центр O первой сферы удален от этой плоскости на расстояние 1. Найдите угол между проекциями прямых OA и OB на плоскость γ и сравните его с $\arccos\frac{4}{5}$.

3. Из пункта A в пункт C выехал с постоянной скоростью велосипедист. За два километра до промежуточного пункта B он решил, что необходимо ехать быстрее, и, увеличив скорость в пункте B, продолжил движение с постоянной скоростью вплоть до пункта C. Приехав в C, велосипедист обнаружил, что время движения с каждой из скоростей было прямо пропорционально соответствующей скорости и что на первые 18 км пути он затратил времени в полтора раза больше, чем на последние 18 км. Найдите расстояние между пунктами A и B, если известно, что расстояние между A и C равно 75 км.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка X лежит на его стороне AD, причем $BX\parallel CD$ и $CX\parallel BA$. Найдите BC, если $AX=\frac{3}{2}$ и $DX=6$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения

$$x^2+(1-2a)x+a-4=0$$

больше $\frac{\pi}{4}$.

6. Найдите минимальное значение выражения $(x+y-z)^2$ при условии, что числа x, y и z удовлетворяют одновременно каждому из неравенств $1\le(x+y)^2\le\frac{4}{3}$, $8\le(y+z)^2\le 9$ и $10\le(z+x)^2\le 11$.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, апрель)

1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy условиями

$$\begin{cases}3y+x\ge -5,\\ 6\sqrt{y+1}\le 6-4y,\\ x\le 0.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\left|6-\log_2\left(4x^2-20x+25\right)\right|\cdot\log_{5-2x}32\le 5.$$

3. Даны две окружности. Первая из них вписана в треугольник ABC, вторая касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC. Известно, что эти окружности касаются друг друга, сумма кубов их радиусов равна 152, а угол BAC равен $\arccos\frac{1}{4}$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

4. Найдите $\operatorname{tg}|x|$, если известно, что

$$\left(5\sin x+3\cos x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{11}-3\sqrt{\sin|x|}\right)=0.$$

5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}\sin\left(2\pi\sqrt{a^2-x^2}\right)=0,\\ 2\cdot 3^{|ax|}+3^{2-|ax|}\le 19\end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

6. Рассматриваются всевозможные параллелепипеды с четырьмя ребрами длины 4 и остальными ребрами длины 3, в которые можно вписать шар. Найдите максимальное значение радиуса такого шара.

Вариант 4

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. При каких значениях параметра b уравнение

$$b^4x + b^2 + \left(2+\sqrt{2}\right)b + 2\sqrt{2} = b^2\left(b+\sqrt{2}\right) + 4x$$

имеет бесконечно много корней?

2. Решите неравенство

$$2\cos\left(\arcsin x\right) - \sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right) \le 0.$$

3. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$ и $AA_1 = 2$. Найдите угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и B_1C_1.

4. Из пункта A в пункт B в 8 часов утра вышел пешеход. Спустя два часа из пункта A вслед за пешеходом по той же дороге выехали велосипедист и мотоциклист. Известно, что скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста. Не позднее чем через 15 минут после своего выезда из пункта A мотоциклист обогнал пешехода и продолжил путь в пункт B. Велосипедист обогнал пешехода спустя не менее 45 минут после обгона пешехода мотоциклистом. Пешеход прибыл в пункт B в 14 часов того же дня. Найдите время прибытия мотоциклиста в пункт B.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{13\cos x + 98\sin y} - \sqrt{13\cos x + 28\sin y} = 4,\\ 2\sqrt{13\cos x + 28\sin y} - \sqrt{70\sin y + 8} = 2.\end{cases}$$

6. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает сторону BC в точке D. Окружность радиуса 35, центр которой лежит на прямой BC, проходит через точки A и D. Известно, что $AB^2 - AC^2 = 216$, а площадь треугольника ABC равна $90\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Вариант 5

(физический факультет, май)

1. Решите уравнение

$$\frac{\log_2(4x-3)}{\log_3 x} = \frac{2}{\log_3 2}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 8x \operatorname{ctg} x + 2\sin^2 4x = \operatorname{ctg} x.$$

3. Решите уравнение

$$4 + \sqrt{x+9} = |x+5|.$$

4. В треугольнике ABC $AB = 14$, $BC = 6$, $AC = 10$. Биссектрисы BD и CE пересекаются в точке O. Найдите OD.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2^{x+1}\log_9 y - 2^{2x} = 2,\\ 9\cdot 2^x \log_{27} y - \log_3^2 y = 9.\end{cases}$$

6. Окружность проходит через вершину B треугольника ABC, касается стороны AC в ее середине D и пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно, $AB : BC = 3 : 2$. Найдите отношение площади ΔAMD к площади ΔDNC.

7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\left(x^2 + 2x - a^2 - 4a - 3\right)\left(\sin x + 2x\right) > 0.$$

8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SC перпендикулярно грани ABC, $\angle ACB$ – прямой, $AC = 1$, $BC = 2$, $SC = 4\sqrt{5}/5$. Сфера касается плоскостей SCA, SCB и ABC, причем плоскости ABC она касается в точке, лежащей на отрезке AB. Найдите:

1) радиус сферы;

2) радиус окружности, по которой пересекаются сфера и грань ASB.

Вариант 6

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos 5x - \cos 15x = \frac{3\sqrt{3}}{2}\operatorname{ctg} 5x.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}}{3-2x} < 1.$$

3. Решите неравенство

$$15\cdot\frac{4^{x-2}}{4^x - 3^x} > 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^x.$$

4. Около окружности радиуса 3 описана равнобедренная трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$), площадь которой равна 48. Окружность касается сторон AB и CD в точках K и L. Найдите KL.

5. Три числа, сумма которых равна 28, образуют геометрическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 3, ко второму числу прибавить 1, а от третьего числа отнять 5, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

6. В пирамиде $SBCD$ каждое ребро равно 3. На ребре SB взята точка A так, что $SA : AB = 1 : 2$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $SACD$.

7. Для каждого значения a решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2 - 6x - a^2 - 5a + 12\right) < -1$$

и найдите, при каких значениях a множество точек x, не являющихся решениями этого неравенства, представляет собой отрезок числовой оси, длина которого меньше $2\sqrt{3}$.

8. В треугольнике KLM отношение радиусов описанной и вписанной окружностей равно 3. Вписанная окружность касается сторон ΔKLM в точках A, B и C. Найдите отношение площади ΔKLM к площади ΔABC.

Вариант 7

(химический факультет, факультет наук о материалах)

1. Решите уравнение

$$4^{\frac{1}{x}} - 5\cdot 2^{2+\frac{1}{x}} + 64 = 0.$$

2. Решите систему неравенств

$$\begin{cases}|x| + |y-1| \le 1,\\ |x-2| + |y-1| \le 1.\end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\log_{17-x^2}\left(56 - x^2 + 10x\right) \le \frac{1}{2}\left(\log_{3+\sqrt{7}}\left(8+3\sqrt{7}\right) + \log_{3+\sqrt{7}} 2\right).$$

4. Решите уравнение

$$\left(63\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\cos^2 x = \operatorname{tg}^2 2x + \sin^2 x.$$

5. Из точки C проведены две касательные к окружности. Точки A и B – точки касания. На окружности взята произвольная точка M, отличная от A и B. Из точки M опущены перпендикуляры MN, ME, MD на стороны AB, BC, CA

соответственно. Найдите площадь треугольника MNE, если $MN = 4$, $MD = 2$ и $\angle ACB = 120^\circ$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$2^{-x^2} \cdot 4^x + \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} - 2 = a^3 - 3a^2 + a + \sqrt{2}$$

имеет единственное решение.

Вариант 8

(факультеты биологический, фундаментальной медицины и биоинженерии и биоинформатики)

1. Решите неравенство

$$|x-2| > 2x+1.$$

2. Решите уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1.$$

3. Длины сторон треугольника ABC равны 4, 6 и 8. Вписанная в этот треугольник окружность касается его сторон в точках D, E и F. Найдите площадь треугольника DEF.

4. Решите неравенство

$$\log_2^2|2x| - 5\log_2|2x| + 2|x|\log_2|2x| - 4|x| + 6 \geq 0.$$

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a\right)^2 + (a+5)\left(x^2 + 2(a-2)x + a^2 - 4a\right) - a^2 + 8a + 2 = 0$$

имеет: а) единственное решение; б) ровно два различных решения.

Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите неравенство

$$|5-7x| < 2.$$

2. Вычислите $\cos\frac{5\pi}{8}$.

3. Пусть $a = \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{50}$. Докажите, что число $a^3 - 30a$ целое, и найдите его.

4. Решите неравенство

$$\log_3 \log_4 x \leq \log_9 \log_2 8x.$$

5. Найдите все значения x, принадлежащие интервалу $(-\pi; \pi)$ и являющиеся решениями уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{-2\sin x}} = \sqrt{-2\cos x}.$$

6. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна c, а один из острых углов равен α. В треугольник помещены две окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается одного из катетов, гипотенузы и другой окружности. Найдите радиусы этих окружностей.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{\left(x^3-1\right)\left(x^2-16\right)}{\log_{10}(15a-x) - \log_{10}(x-a)} = 0$$

имеет единственное решение.

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{x|x|+1}{x-2} + 1 \geq x.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{x-y}\dfrac{xy}{2} = 2, \\ x + y = xy + 1. \end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$3^{2-x} + 6\cdot\left(\sqrt{3}\right)^{2-2x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+x-2}-3}.$$

4. Пункт C расположен между пунктами A и B, $AC = 2BC$. Из пунктов C и B одновременно навстречу друг другу вышли два поезда. Время, затраченное вторым поездом на путь от B до A, не менее чем в 6 раз превосходит время, затраченное первым поездом на путь от C до B. Третий поезд, скорость которого равна разности скоростей первых двух, затратил на путь от A до B не менее чем в 9 раз больше времени, чем первый поезд затратил на путь от C до места встречи со вторым. Чему равно отношение скоростей первого и второго поездов?

5. Найдите все решения уравнения

$$|\sin 2x| + \cos x = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\sqrt{3}; \frac{8}{3}\right]$.

6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектриса CD и прямая DE, перпендикулярная CD (точка E лежит на прямой AC). Найдите площадь треугольника ABC, если $CE = 4$, $CA = 3$.

7. При каких значениях параметра a периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy системой

$$\begin{cases} y \leq \sqrt{1-x^2}, \\ a|y| \leq |x|, \end{cases}$$

больше, чем $4 + 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{2}$?

8. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с длиной ребра, равной 1, на вертикальном ребре AA' и на горизонтальном ребре AB взяты точки M и N соответственно, при этом $AM = \frac{1}{3}$, $AN = \frac{3}{4}$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная диагонали AC нижнего основания куба. Чему равна площадь получившегося сечения?

Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$|x-2| = \frac{1}{x-2}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{4\sin x - 3}{4\sin^2 x + \sin x - 3} = 2.$$

3. Квадратное уравнение $x^2 - 6px + q = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Числа p, x_1, x_2, q – четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Найдите x_1 и x_2.

4. Тележка с передними колесами диаметром 30 см и задними колесами диаметром 40 см движется по прямой дороге, проходящей через точки A и B. Между точками A и B ровно 100 метров. Точка A покрашена. Через точку A проезжают правые колеса тележки и в точках соприкосновения с ней красятся. В свою очередь, при каждом соприкосновении с дорогой эти точки оставляют свой след в виде точек на дороге. Никакие точки на дороге, кроме точки A, не окрашивают колеса. Тележка движется от точки A к точке B. Найдите:

а) наименьшее расстояние между соседними окрашенными точками;

б) количество окрашенных точек на отрезке AB.

5. В треугольнике PQR точка T лежит на стороне PR, $\angle QTR = \angle PQR$, $PT = 8$, $TR = 1$. Найдите:

а) сторону QR;

б) угол QRP, если радиус описанной около треугольника PQT окружности равен $3\sqrt{3}$.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = 5y + x. \end{cases}$$

Вариант 12

(филологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\log_{x^6} \pi \cdot \arcsin \dfrac{x}{2}}{\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{x}} \geq 0\,.$$

2. Окружность радиуса 3 проходит через середины трех сторон треугольника ABC, в котором величины углов A и B равны 60°и 45° соответственно. Найдите площадь треугольника.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) + \sqrt{3}\left(\cos x - \sin x\right)} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}\,.$$

4. Положительное число a подобрано так, что меньший корень уравнения

$$x^3 + 2x = 4x^2 - 4$$

является одновременно одним из решений неравенства

$$a^{5x-4} > a^{-x^2+4x-4}\,.$$

Решите это неравенство.

5. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар радиуса 6, а боковая грань составляет угол 45° с высотой пирамиды.

а) Найдите площадь основания пирамиды.

б) В данную пирамиду вписан второй шар так, что он касается всех боковых граней и первого шара; затем вписан третий шар, касающийся всех боковых граней и второго шара, и т.д. Найдите сумму объемов бесконечной системы вписанных шаров.

6. Словарь людоедов из племени «Мумбо-Юмбо» составляет 300 слов. Эллочка Щукина легко и свободно обходилась тридцатью.

Однажды людоед начал посещать проповеди миссионера, поэтому его словарный запас, оставаясь целочисленным, стал увеличиваться на некоторое число процентов за каждые полгода. Эллочка поступила в вечернюю школу и каждый месяц стала узнавать целое число новых слов, равное 50% от того количества слов, которое людоед знал к концу первого полугодия. Однако через несколько месяцев Эллочка бросила школу.

Какое наибольшее целое число месяцев может проучиться Эллочка в школе, чтобы словарь людоеда после одного года посещения проповедей обязательно остался богаче словаря Эллочки?

Вариант 13

(экономический факультет, отделение экономики)

1. Докажите или опровергните следующее утверждение: периметр ромба с диагоналями 1 и 3 больше длины окружности радиуса 1.

2. Решите неравенство

$$\left(1 - \frac{2x}{5}\right)^{7+11x-6x^2} \geq 1\,.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - xy - x = 11, \\ xy^2 - x^2y = -30. \end{cases}$$

4. Бригада рабочих выполняет задание за 42 дня. Если бы в бригаде было на 4 человека больше и каждый рабочий бригады работал бы на 1 час в день дольше, то это же задание было бы выполнено не более чем за 30 дней. При увеличении бригады еще на 6 человек и рабочего дня еще на 1 час все задание было бы закончено не ранее чем через 21 день. Определите наименьшую при данных условиях численность бригады, а также продолжительность рабочего дня.

5. Решите уравнение

$$\log_2\left(\cos 3\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right) \cdot \log_2\left(\cos 2x\right) + \log_2\left(\sin 5x + \sin x\right) = 0.$$

6. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$\sqrt[4]{x^2 - 6ax + 10a^2} + \sqrt[4]{3 + 6ax - x^2 - 10a^2} \geq$$
$$\geq \sqrt[4]{\sqrt{3}a + 24 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \left|y - \sqrt{2}a^2\right| + \left|y - \sqrt{3}a\right|}$$

имеет единственное решение.

7. Равные кубы A и B, имеющие общую вершину, расположены так, что ребро куба A лежит на диагонали куба B, а ребро куба B лежит на диагонали куба A. Найдите объем общей части этих кубов, если длина их ребер равна 1.

Вариант 14

(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x + 1} > x - 2\,.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{x+1}\left(x^2 + 3x - 10\right) > 2\,.$$

3. Решите уравнение

$$2^{2^x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^x - 1} = 3\,.$$

4. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Она пересекает сторону AB в точке E. На стороне BC взята точка G так, что отрезок AG пересекает окружность в точке F, причем отрезки EF и AC параллельны, $BG = 2GC$ и $AC = 2\sqrt{3}$. Найдите GF.

5. Решите уравнение

$$\cos 6x - 3\cos 5x + \cos 4x - 4\cos x + 5 = 0\,.$$

6. Решите уравнение

$$\left|x^3+7x^2-11x-6\right|+\left|x^3-12x^2-5x+3\right|=18x^2-2x-13\,.$$

Вариант 15

(социологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x+10}=x+2\,.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}\sqrt{x^3+x^2+x-14}}\left(\log_{\frac{1}{4}}\left(-x^2+5x-6\right)\right)<0\,.$$

3. Определите угол A треугольника между сторонами, равными 2 и 4, если медиана, выходящая из вершины A, равна $\sqrt{7}$.

4. Куплен товар двух сортов: первого на 1200 руб. и второго на 1500 руб. Товара второго сорта куплено на 10 кг больше, чем первого, а по цене (за 1 кг) на 20 руб. меньше. Сколько куплено товара первого сорта?

5. В шар радиуса R вписана четырехугольная пирамида с квадратным основанием. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро образует с ней угол α. Найдите боковую поверхность пирамиды и вычислите ее значение при $\alpha=\arcsin\sqrt{\frac{8}{17}}$, $R=\sqrt{17}$.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$(1+a)x^2+(1-a)x+a+3=0$$

имеет по крайней мере один корень и все его корни являются целыми числами.

Вариант 16

(Институт стран Азии и Африки)

1. Решите неравенство

$$\frac{2^x-2^{2-x}-3}{2^x-2}\ge 0\,.$$

2. Решите уравнение

$$\sin 4x+2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}=0\,.$$

3. Решите неравенство

$$x\sqrt{2-x}\le x^2-x-2-\sqrt{2-x}\,.$$

4. Решите неравенство

$$\left|\log_{x+1}2+\log_2\frac{x+1}{4}\right|+\left|\log_2(4x+4)+\log_{x+1}2\right|<\frac{17}{2}\,.$$

5. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB=8$, $BC=6$ и биссектриса $BD=6$. Найдите длину медианы AE.

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\arccos 2y+\arcsin 3x=\dfrac{\pi}{4},\\ \arcsin 2y\cdot\arccos 3x=\dfrac{5\pi^2}{64}.\end{cases}$$

Для каждого решения $(x;y)$ определите, какое из чисел больше: $2y-3x$ или $\sqrt[4]{2}-0,5$.

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x^2+y^2-6|x|-6|y|+17\le 0,\\ x^2+y^2-2y=a^2-1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 17

(факультет государственного управления)

1. Из деревни в город вышел турист. Первую половину пути он шел пешком со скоростью 5 км/ч, а затем оставшуюся часть пути ехал на автобусе. Найдите среднюю скорость движения туриста на всем маршруте, если скорость автобуса равна 45 км/ч.

2. Решите уравнение

$$4^x-3\cdot 2^{x+\frac{1}{2}}-8=0\,.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{-1}{\dfrac{8}{9-x^2}+1}\le 3-x\,.$$

4. На окружности радиуса 5, описанной около правильного треугольника, взята точка D. Известно, что расстояние от точки D до одной из вершин треугольника равно 9. Найдите сумму расстояний от точки D до двух других вершин треугольника.

5. Одна труба наполняет бассейн на 2 часа, а другая – на 4 часа 30 минут дольше, чем наполняют этот бассейн обе трубы, открытые одновременно. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба в отдельности?

6. Найдите все значения a, при которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(3\sqrt{x|x|}+|y|-3\right)\left(|x|+3|y|-9\right)=0,\\ (x-a)^2+y^2=25\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

7. Пять пиратов делят 10 слитков золота. Процедура дележа устроена так: сначала старший пират предлагает дележ по своему выбору. Если больше половины пиратов его отвергает, второй по старшинству пират предлагает новый дележ добычи среди оставшихся четырех (старший пират никакого участия в дальнейшем дележе не принимает). Если новый дележ отвергается большинством голосов, то предлагавший его пират от дальнейшего участия в дележе устраняется, и процедура повторяется для трех пиратов. Как будут распределены слитки золота, если каждый пират из двух данных дележей предпочитает тот, в котором его доля золотых слитков больше?

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Катушку, лежащую на горизонтальной плоскости, тянут за намотанную на ее среднюю часть легкую нерастяжимую нить так, что ее конец A движется со скоростью v под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту (рис.1). При этом катушка катится без проскальзывания, а ее ось не изменяет своей ориентации. Найдите скорость движения оси катушки, если радиус r средней части катушки в $n=2$ раза меньше радиуса R ее щек.

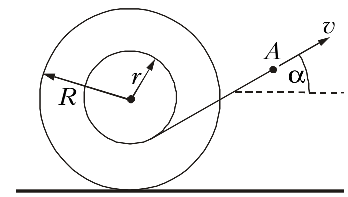

Рис. 1

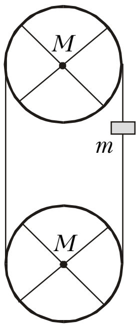

Рис. 2

2. На свободно вращающиеся ободы двух одинаковых велосипедных колес, центры которых лежат на одной вертикали, а оси закреплены горизонтально и параллельны, натянута легкая шероховатая нерастяжимая нить, концы которой прикреплены к грузу массой m, удерживаемому вблизи верхнего обода (рис.2). Толщина обода много меньше его радиуса, а масса обода много больше массы спиц и втулки колеса и равна M. С каким ускорением будет двигаться груз после его освобождения до момента касания нижнего обода?

3. На рисунке 3 показана упрощенная схема кривошипно-шатунного механизма паровоза. Когда ось A крепления шатуна к колесу находится выше оси O колеса, давление справа от поршня равно атмосферному $p_а$, а слева от него давление поддерживают равным $p > p_а$; когда ниже, то давление слева $p_а$, а справа p. Радиус колеса R, $AO = r$, площадь поршня S. Найдите максимальную горизонтальную силу, с которой колесо действует на свою ось.

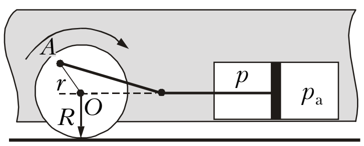

Рис. 3

4. Два диска, масса одного из которых в $n = 2$ раза больше другого, прикрепили к концам легкой пружины так, чтобы их центры масс лежали на вертикали, совпадающей с осью пружины, если один из дисков положить на горизонтальный стол. Вначале на стол положили более тяжелый диск. Оказалось, что период малых гармонических вертикальных колебаний верхнего диска равен $T = 0{,}2$ с. Затем пружину с дисками перевернули так, что внизу оказался более легкий диск. При каких амплитудах вертикальные колебания тяжелого диска могут оставаться гармоническими, если возникающие при этом деформации пружины можно считать малыми?

5. Прочный баллон емкостью $V = 60$ л заполнили смесью водорода и кислорода под давлением $p_1 = 3{,}24$ атм при температуре $t_1 = 27$ °С. Масса смеси газов $m = 60$ г. Затем в баллоне произвели электрический разряд, вызвавший химическую реакцию $2H_2 + O_2 = 2H_2O$. Найдите давление в баллоне после остывания его содержимого до температуры $t_2 = 100$ °С.

6. В тепловом двигателе в качестве рабочего вещества используют один моль идеального одноатомного газа. Цикл двигателя состоит из изобары, изохоры и адиабаты. КПД цикла η. Максимальная температура газа в цикле T_1, минимальная T_3. Зная, что максимальная температура реализуется при адиабатическом процессе, найдите работу, совершаемую над газом при его сжатии.

7. В плоский конденсатор вставили две пластины одинаковой толщины, заполнившие все пространство между его обкладками, причем так, что каждая из пластин касается одной из обкладок и другой пластины. Удельное сопротивление материала первой пластины ρ_1, второй ρ_2. Расстояние между обкладками конденсатора d. Между пластинами поддерживается постоянное напряжение U. Найдите плотность поверхностного заряда на границе соприкосновения пластин.

8. Равносторонний треугольник массой m, изготовленный из жесткой тонкой проволоки, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его вершину A параллельно противоположной стороне DC. Длина стороны треугольника a. Сторона DC лежит на опоре так, что плоскость треугольника горизонтальна. Треугольник находится в однородном магнитном поле, линии индукции которого горизонтальны и перпендикулярны оси вращения. Найдите величину B индукции поля, при которой треугольник не будет давить на опору, если по нему течет постоянный ток I.

9. С помощью объектива, состоящего из собирающей и рассеивающей линз с фокусными расстояниями $F_1 = 20$ см и $F_2 = -20$ см соответственно, находящихся на расстоянии $L = 16$ см друг от друга, получили изображение Солнца. Найдите фокусное расстояние F тонкой линзы, с помощью которой можно получить изображение Солнца того же размера, что и с помощью объектива. Линзы объектива считать тонкими, а их главные оптические оси совпадающими.

10. На верхней горизонтальной плоскости пластинки из стекла с показателем преломления $n = 1{,}5$ сделано широкое клинообразное углубление, профиль которого показан на поперечном сечении пластинки, изображенном на рисунке 4. Сверху на пластинку падает параллельный пучок фотонов, движущихся вертикально вниз. При этом на матовой нижней плоскости пластинки наблюдается интерференционная картина. Зная, что толщина пластинки $H = 10$ см, энергия отдельного фотона $W = 4 \cdot 10^{-19}$ Дж, а угол $\alpha = 0{,}02$ рад, определите наибольший порядок максимума в наблюдаемой интерференционной картине.

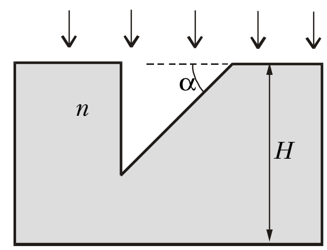

Рис. 4

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. На гладком горизонтальном столе покоятся два одинаковых кубика массой M каждый. В центр левого кубика попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью, равной v_0 и направленной вдоль линии, соединяющей центры кубиков. Пробив насквозь левый кубик, пуля летит дальше со скоростью $v_0/2$, попадает в правый кубик и застревает в нем. Через какое время τ после попадания пули в левый кубик кубики столкнутся, если начальное расстояние между ними равно L? Размерами кубиков пренебречь.

2. На горизонтальном столе покоится клин массой $M = 4$ кг. Сверху на клин падает шарик массой $m = 1$ кг. Определите угол при основании клина α, если известно, что после упругого удара о клин шарик отскочил под углом $\beta = 45^\circ$ к вертикали. Трением пренебречь.

3. Два вертикальных сообщающихся цилиндра заполнены водой и закрыты поршнями с массами $M_1 = 1$ кг и $M_2 = 2$ кг. В положении равновесия левый поршень расположен выше правого на $h = 10$ см. Когда на левый поршень поместили гирю массой $m = 2$ кг, поршни в положении равновесия оказались на одной высоте. Какова будет разность высот поршней H в положении равновесия, если гирю перенести на правый поршень?

4. Маленький шарик, подвешенный на нити, отклоняют от положения равновесия и отпускают без начальной скорости. Определите, с каким ускорением a_1 начнет двигаться шарик, если известно, что в момент прохождения шариком нижней точки траектории его ускорение равно $a_2 = 15$ м/с^2. Нить считать невесомой и нерастяжимой, сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

5. Стакан объемом $V_0 = 290$ см^3 перевернули вверх дном и медленно погрузили в воду на глубину $h = 5$ м. При этом объем воздуха в стакане оказался равным $V_1 = 194$ см^3.

Найдите парциальное давление водяного пара, находящегося в стакане, считая его насыщенным. Относительная влажность атмосферного воздуха $\varphi = 60\%$, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Температуру воздуха в стакане считать постоянной. Размером стакана по сравнению с глубиной его погружения пренебречь.

6. В цилиндрическом сосуде с площадью основания $S = 11$ см^2 находится кубик льда массой m = 11 г при температуре t = −10 °С. Какое минимальное количество теплоты Q нужно сообщить льду для того, чтобы при дальнейшем нагревании уровень воды в сосуде не изменялся? Удельная теплоемкость льда $c = 2{,}1$ Дж/(г · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ Дж/г, плотность льда $\rho_л = 0{,}9$ г/см^3. При расчете принять, что при плавлении кусок льда сохраняет форму куба.

7. Расстояние l между двумя одинаковыми металлическими шариками намного больше их радиусов. Когда на шарики поместили некоторые заряды, сила отталкивания между ними оказалась равной F_1. После того, как шарики соединили тонкой проволокой, а затем убрали ее, шарики стали отталкиваться с силой F_2. Определите первоначальные заряды шариков q_1 и q_2. Электрическая постоянная равна ε_0.

8. Реостат включен в цепь, как показано на рисунке 5. Положение его движка характеризуется коэффициентом α ($0 \le \alpha \le 1$). При каком α в реостате будет выделяться максимальная мощность? Напряжение на клеммах цепи постоянно.

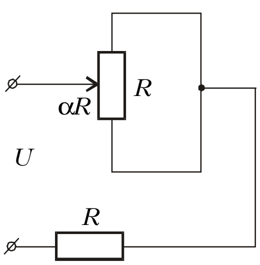

Рис. 5

9. Вне прозрачного шара вплотную к его поверхности помещен точечный источник света. При каких значениях показателя преломления материала шара n все выходящие из него лучи будут наклонены по направлению к оси, проведенной через источник и центр шара?

10. Человек, страдающий дальнозоркостью, рассматривает предмет, находящийся на расстоянии d = 20 см перед его глазами. При этом изображение предмета оказывается смещенным за поверхность сетчатки глаза на b = 2,2 мм. Определите оптическую силу D контактной линзы, устраняющей это смещение. Считать, что оптическая система глаза представляет собой тонкую линзу с фокусным расстоянием F = 2 см, а контактная линза вплотную примыкает к ней.

Химический факультет

1. Материальная точка движется прямолинейно и равноускоренно, проходя два последовательных отрезка пути l_1 и l_2 за времена t_1 и t_2 соответственно. Найдите ускорение точки.

2. Из одной точки над поверхностью земли вылетают одновременно две частицы с горизонтальными и противоположно направленными скоростями $v_1 = 4$ м/с и $v_2 = 9$ м/с. Через какое время угол между направлениями скоростей этих частиц станет 90°? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. На краю стола высотой h = 0,8 м лежит маленький шарик. В него попадает тело, масса которого много больше массы шарика. Скорость тела $v_0 = 10$ м/с. Удар абсолютно упругий. На каком расстоянии от стола шарик упадет на землю?

4. На дне сосуда на одной из своих боковых граней лежит треугольная призма. В сосуд налили жидкость плотностью ρ_0 так, что уровень жидкости сравнялся с верхним ребром призмы. Какова плотность материала призмы, если сила давления призмы на дно увеличилась в 3 раза? Жидкость под призму не подтекает. Атмосферное давление не учитывать.

5. В некотором процессе давление одного моля идеального одноатомного газа уменьшалось с увеличением объема газа по линейному закону таким образом, что в конечном состоянии его объем увеличился в k = 2 раза, а давление уменьшилось в n = 3 раза. Полагая R = 8,3 Дж/(моль · К), найдите работу, совершенную газом в этом процессе, а также изменение его внутренней энергии. Начальная температура газа составляла $T_1 = 300$ К.

6. В герметично запаянном сосуде объемом $V_0 = 1{,}1$ л находится M = 100 г кипящей воды и пар массой m при температуре t = 100 °С. Найдите массу пара. Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3. Считать, что воздух в сосуде отсутствует. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, молярная масса воды М = 0,018 кг/моль, универсальная газовая постоянная R = = 8,3 Дж/(моль · К).

7. В изображенной на рисунке 6 электрической схеме $R_1 = R_2 = R_3$, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$. Определите отношение энергий конденсатора при положениях ключа *1* и *2*. Внутренним сопротивлением источников пренебречь. Диод считать идеальным.

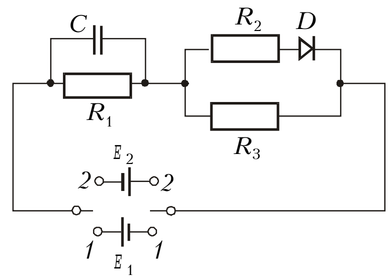

Рис. 6

8. На горизонтальном диэлектрическом диске, вращающемся вокруг своей оси, на расстоянии r от оси находится небольшое тело массой m, имеющее заряд q. Диск находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вдоль оси вращения. Коэффициент трения между телом и диском μ. Найдите максимальную угловую скорость вращения диска, при которой тело еще не соскальзывает с диска. Поляризацию диска не учитывать.

9. В воде точечный источник света движется вертикально вниз со скоростью v = 1 м/с. Определите скорость u движения границы светового пятна на поверхности воды (рис.7). Показатель преломления воды принять равным n = 4/3.

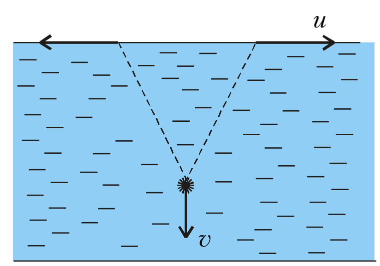

Рис. 7

10. Изображение предмета на матовом стекле фотоаппарата при фотографировании с расстояния $l_1 = 15$ м получилось высотой $h_1 = 30$ мм, а с расстояния $l_2 = 9$ м − высотой $h_2 = 51$ мм. Найдите фокусное расстояние объектива фотоаппарата.

Публикацию подготовили П.Бородин, В.Власов, В.Воронин, Е.Григорьев, Д.Денисов, Н.Лёвшин, Г.Медведев, А.Невзоров, А.Павликов, В.Панферов, В.Погожев, М.Потапов, А.Разгулин, И.Сергеев, М.Смуров, В.Тихомиров, В.Ушаков, М.Федотов, Е.Хайлов, С.Чесноков, Е.Шикин