Решения задач М1826—М1830, Ф1838—Ф1847

М1826. *Про положительные числа a, b, c известно, что* $1/a+1/b+1/c \ge a+b+c$. *Докажите, что* $a+b+c \ge 3abc$.

Умножая неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge a+b+c$ на общий знаменатель, получаем равносильное неравенство $bc+ac+ab \ge (a+b+c)abc$.

Теперь докажем вспомогательное неравенство $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \ge 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca).$$

Отсюда легко получаем требуемое неравенство:

$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \ge 3(a+b+c)abc,$$
$$a+b+c \ge 3abc.$$

С.Злобин

М1827. *Пусть Q – произвольная точка окружности с диаметром AB, QH – перпендикуляр, опущенный на AB (рис.1). Точки C и M – это точки пересечения окружности с центром Q и радиусом QH с первой окружностью. Докажите, что прямая CM делит радиус QH пополам.*

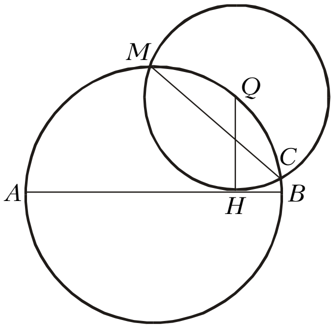


Рис.1

Проведем прямые CH и MH до пересечения с окружностью в точках F и R соответственно (рис.2). Тогда $\angle MCF = \frac{1}{2} \cup MF = \angle MRF$ и $\angle MCF = \angle MHA$, так как AH – касательная; значит, $\angle RHB = \angle HRF$, или $AB \parallel FR$. В ΔHRW угол $\angle HWR = \frac{1}{2} \cup QR = \angle QMH$, но $\angle QMH = \angle QHM$ ($MQ = QH$), т.е. ΔHRW – равнобедренный и RI – высота в ΔHRW ($I = HW \cap RF$). Получим, что $HI = IW$, $QH = HW$. Пользуясь результатом задачи «Проблема бабочки», видим, что $IH = HL = IW = LQ$, что и требовалось доказать. (О «бабочках» см., например, книгу: Г.С.Коксетер, С.Л.Грейтцер «Новые встречи с геометрией».)

В.Дубов

М1828. *А, Б, В, Г и Д собирают почтовые марки. У А – более 3/4 марок Б, у Б – более 3/4 марок В, у В – более 3/4 марок Г, у Г – более 3/4 марок Д, у Д – более 3/4 марок А. Докажите, что есть марка, которая имеется у каждого филателиста.*

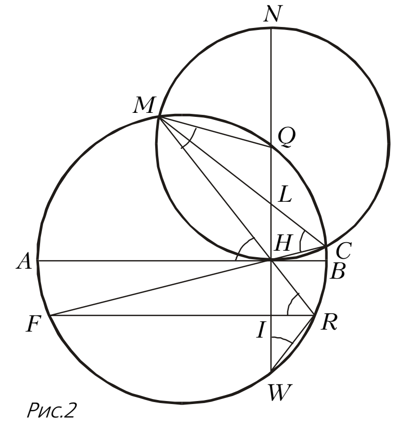


Рис.2

Сначала переведем условие задачи на язык конечных множеств. Имеется пять конечных множеств $А$, $Б$, $В$, $Г$ и $Д$; обозначим $А \cap Б = Б_1$, $Б \cap В = В_1$, $В \cap Г = Г_1$, $Г \cap Д = Д_1$ и $Д \cap А = А_1$. Также будем обозначать через $|X|$ количество точек (мощность) множества X. Известно, что $|Б_1| > \frac{3}{4}|Б|$, $|В_1| > \frac{3}{4}|В|$, $|Г_1| > \frac{3}{4}|Г|$, $|Д_1| > \frac{3}{4}|Д|$ и $|А_1| > \frac{3}{4}|А|$. Нужно доказать, что пересечение пяти множеств $А \cap Б \cap В \cap Г \cap Д$ не пусто.

Докажем это методом улитки, ползущей по склону Фудзи. Полагаем для определенности, что множество $А$ имеет максимальную мощность. Схема доказательства будет такой. По условию множество $Д$ «толсто» пересекается с множеством $А$. Затем мы обнаруживаем, что три множества $Г$, $Д$ и $А$ имеют тоже достаточно «толстое» пересечение. Далее видим, что четыре множества $В$, $Г$, $Д$ и $А$ имеют пересечение еще достаточно «толстое» для того, чтобы оно пересекалось непременно и с множеством $Б$.

Но все по порядку. В силу того, что $|А|$ максимально, а множества $Д_1$ и $А_1$ содержатся в $Д$, нетрудно убедиться в справедливости неравенства для множества $F = Д_1 \cap А_1$: $|F| > \frac{1}{2}|А|$. При этом $F \subset Г \cap Д \cap А$. Множества F и $Г_1$ содержатся в $Г$, а $|Г_1| > \frac{3}{4}|Г|$, значит, множество $G = F \cap Г_1$ таково, что $|G| > \frac{1}{4}|А|$. Далее, множества G и $В_1$ содержатся в $В$, а $|В_1| > \frac{3}{4}|В|$. Поэтому мы заключаем, что множество $H = G \cap В_1$ не пусто. Но H содержится в множестве $Б$, а также, в силу процедуры, во всех других множествах $В$, $Г$, $Д$ и $А$. Иначе говоря, непустое множество $H \subset А \cap Б \cap В \cap Г \cap Д$, т.е. утверждение доказано: есть такая марка! Непривычность таких выкладок для читателя связана с тем, что они теоретико-множественные и арифметические одновременно. Зато теперь вы можете обобщить задачу на n филателистов и доказать ее по той же схеме. При этом роль числа $\frac{3}{4}$ будет выполнять число $\frac{n-2}{n-1}$.

В.Произволов

М1829. *Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в черный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества черных точек были подобны* *друг другу (возможно, с разными коэффициентами подобия)?*

Ответ: можно.

Рассмотрим такую раскраску квадрата (рис.1). Впишем круг в квадрат и раскрасим в черный цвет точки квадрата, лежащие вне круга. Впишем в полученный круг квадрат со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата. Раскрасим в белый цвет точки круга, лежащие вне «маленького» квадрата. По такому же правилу раскрасим маленький квадрат и т.д. Заметим, что мы считаем граничные точки лежащими «внутри» фигуры. Таким образом, граница каждого квадрата покрашена черным, за исключением четырех точек касания вписанного в квадрат круга, а граница каждого круга – белым, за исключением четырех вершин квадрата, вписанного в этот круг.

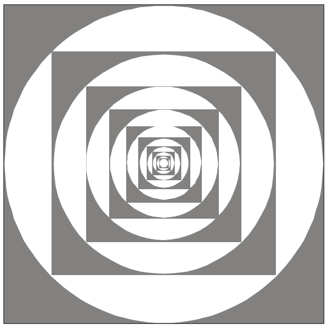


Рис.1

Пусть сторона исходного квадрата равна a (рис.2), тогда сторона маленького квадрата равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Следовательно, длины сторон квадратов стремятся к 0. Поэтому все точки, кроме центра, будут раскрашены. Центр раскрасим в черный цвет.

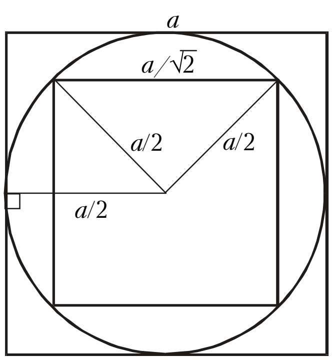


Рис.2

Очевидно, что множество черных точек квадрата подобно множеству черных точек круга, вписанного в этот квадрат (второе получается из первого гомотетией с центром в центре квадрата и с коэффициентом $\frac{a}{\sqrt{2}}$). А множество белых точек квадрата совпадает с множеством белых точек вписанного в него круга.

Г.Гальперин

М1830. *В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих чисел. Докажите, что в последовательности найдется число, начиная с которого каждое число равно сумме всех предыдущих чисел.*

Пусть частное от деления суммы S_{n-1} предыдущих членов на очередной член a_n равно k_n, т.е. $S_{n-1} = a_n k_n$. Рассмотрим последовательность частных k_n, $n \geq 2002$. Так как следующий член a_{n+1} делит сумму $S_{n-1} + a_n$ и $a_{n+1} > a_n$, то

$$k_{n+1} = \frac{S_n}{a_{n+1}} = \frac{S_{n-1} + a_n}{a_{n+1}} < \frac{S_{n-1} + a_n}{a_n} = k_n + 1.$$

Таким образом, $k_{n+1} \leq k_n$. Поэтому, начиная с некоторого места (при $n \geq N$), $k_n = k$. Но тогда при $n \geq N$ имеем $a_{n+1} = \frac{S_{n-1} + a_n}{k} = a_n + \frac{a_n}{k}$, т.е. с этого места получаем геометрическую прогрессию

$$a_{n+1} = \frac{k+1}{k} a_n = \frac{(k+1)^{n-N}}{k^{n-N}} a_N .$$

Получаем, что a_N делится на сколь угодно большую степень k. Значит, $k = 1$, что и требовалось доказать.

А.Шаповалов

Ф1838. *У вертикальной стены стоит палочка AB длиной L (рис.1). На ее нижнем конце B сидит жук. В тот момент, когда конец B начали двигать вправо по полу с постоянной скоростью $\vec{v}$, жук пополз по палочке с постоянной скоростью $\vec{u}$ относительно нее. На какую максимальную высоту над полом поднимется жук за время своего движения по палочке, если ее верхний конец не отрывается от стенки?*

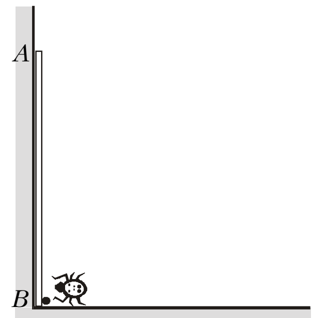


Рис.1

Пусть G – место нахождения жука на палочке(рис.2), M – середина палочки, $GK = h$ – высота жука над полом, $ON = H$ – расстояние от угла O до палочки, t – время, прошедшее с начала движения жука. Тогда $OB = vt$, $BG = ut$, $AM = OM = L/2$.

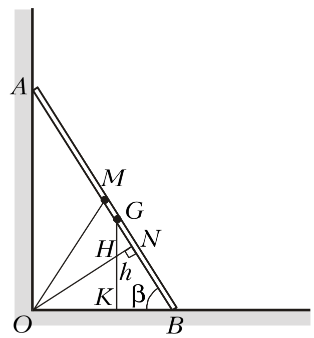


Рис.2

Треугольники ONB и GKB подобны, так как они прямоугольные и угол β у них общий, поэтому

$$\frac{GK}{ON} = \frac{BG}{OB}, \text{ или } \frac{h}{H} = \frac{ut}{vt} = \frac{u}{v},$$

откуда

$$h = H\frac{u}{v}.$$

В прямоугольном треугольнике OMN катет $ON = H$ меньше или равен гипотенузе $OM = L/2$, причем равенство достигается при $\beta = 45^\circ$. Следовательно,

$$h_{\max} = H_{\max}\frac{u}{v} = \frac{L}{2}\frac{u}{v}.$$

Этот результат верен, если за время $t_{\max} = \left(L\cos 45^\circ\right)/v$ жук не успевает доползти до верхнего конца палочки, т.е. если $ut_{\max} < L$, что эквивалентно неравенству $u \leq v\sqrt{2}$. В противном случае высота h будет максимальной к моменту времени $t'_{\max} = L/u$ достижения жуком точки A:

$$h'_{\max} = \sqrt{L^2 - \left(vt'_{\max}\right)^2} = L\sqrt{1 - \frac{v^2}{u^2}}.$$

С.Кузьмичев

Ф1839. *На гладком столе покоится гантелька, состоящая из жесткого легкого стержня длиной L и двух маленьких одинаковых шариков на концах стер-*

жня. В начальный момент гантелька ориентирована с севера на юг. На один из шариков начинает действовать постоянная сила $\vec{F}$, все время направленная на восток. Найдите скорости шариков в тот момент, когда гантелька повернется на 90°. Найдите также силу натяжения стержня в этот момент. Масса каждого шарика M.

Центр масс гантельки движется прямолинейно с ускорением $a = F/(2M)$. Кроме того, гантелька неравномерно вращается вокруг своего центра. Угловую скорость вращения можно найти довольно просто. Пусть середина гантельки сместилась к некоторому моменту времени на l, а угол поворота гантельки относительно первоначального положения составил φ. Полная механическая энергия гантельки, т.е. сумма энергии поступательного движения центра масс и энергии вращательного движения относительно центра масс, определяется работой действующей силы:

$$W_{\text{пост}} + W_{\text{вращ}} = F\left(l + \frac{1}{2}L\sin\varphi\right).$$

С другой стороны,

$$W_{\text{пост}} = 2M\frac{v^2}{2} = 2M\frac{2al}{2} = 2M\frac{Fl}{2M} = Fl,$$

$$W_{\text{вращ}} = 2\frac{M(L/2)^2\omega^2}{2} = \frac{ML^2\omega^2}{4}.$$

Отсюда можно выразить угловую скорость вращения гантельки как функцию угла φ:

$$\omega = \sqrt{\frac{2F\sin\varphi}{ML}}.$$

Теперь можно найти силу натяжения стержня T. Удобно перейти в систему отсчета, связанную с центром масс, только нужно учесть, что она неинерциальная. Движется эта система отсчета равноускоренно, так что достаточно добавить две силы инерции – на каждый шарик будет действовать добавочная сила $f = -Ma = -F/2$. Каждый шарик в этой системе движется по окружности радиусом $L/2$, тогда для одного из шариков в проекции на направлении стержня получим

$$T - \frac{F\sin\varphi}{2} = M\omega^2\frac{L}{2}.$$

Отсюда

$$T = \frac{3F\sin\varphi}{2}.$$

В условии задачи рассматривается случай $\varphi = 90^\circ$, при этом $T = 1{,}5F$.

Найти скорость поступательного движения шариков не так просто. Ускорение центра масс нам известно, а вот время «путешествия» определяется вращательным движением гантельки. При малых значениях угла отклонения все считается легко, но в нашем случае углы большие. Выражение для угловой скорости мы записали, но это функция угла, а не времени, и найти зависимость угла поворота от времени простым способом не получится. Время поворота можно записать в виде несложного интеграла: $\tau = \int d\varphi/(\omega(\varphi))$ в пределах изменения угла от 0 до $\pi/2$. Но интеграл в нашем случае «не берется», хотя примерный ответ получить можно: $\tau = 2{,}62\sqrt{Ml/(2F)}$, однако это неинтересно. Попробуем посчитать другим способом (но тоже приближенно). Для этого заметим, что при небольших углах поворота проекция действующей силы на касательное к окружности направление получается почти равной F, а в этом случае движение вдоль окружности происходит с неизменным касательным ускорением ε. Для углов до 0,5 рад так и будем считать (можно взять и другое значение угла, но это – очень круглое и не очень большое). Время τ_1 прохождения этой части пути по кругу находим из соотношения

$$\frac{\varepsilon\tau_1^2}{2} = \varphi_1, \text{ и } \tau_1 = \sqrt{\frac{2\varphi_1}{\varepsilon}} = 1{,}41\sqrt{\frac{ML}{2F}}.$$

Кстати, к концу этого интервала угловая скорость достигает 0,7 от максимальной. Дальнейшее движение происходит почти равномерно – средняя скорость вращения составляет примерно $(0{,}7+1)/2 = 0{,}85$ от максимальной. Тогда этот интервал времени равен

$$\tau_2 = \frac{\pi/2 - \varphi_1}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{1{,}57 - 0{,}5}{0{,}85\omega_{\max}} = 1{,}26\sqrt{\frac{ML}{2F}}.$$

Всего при таком способе вычислений для времени «путешествия» получится

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = 2{,}67\sqrt{\frac{ML}{2F}}.$$

Видно, что этот грубый способ дает просто превосходную точность.

Теперь можно найти скорость центра гантельки к концу интервала и полную скорость каждого шарика в этот момент:

$$V = \sqrt{(a\tau)^2 + \left(\omega\frac{L}{2}\right)^2} = 1{,}67\sqrt{\frac{FL}{2M}}.$$

З.Рафаилов

Ф1840. *Маятник состоит из длинного легкого стержня длиной L, шарнирно закрепленного за один из концов. К другому концу стержня прикреплено велосипедное колесо радиусом R, вся масса которого сосредоточена в его ободе. Колесо может свободно вращаться вокруг своей оси. Стержень отводят на небольшой угол от вертикали и отпускают так, что он может совершать колебания в плоскости, которая перпендикулярна оси колеса. Найдите период таких колебаний. Как изменится этот период, если в оси колеса будет большое трение, не позволяющее ему вращаться?*

В том случае, когда колесо может свободно вращаться вокруг своей оси, оно вращаться как раз и не будет (понятно – почему?). Тогда маятник ведет себя как математический с периодом колебаний

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

А вот если закрепить колесо на оси («с помощью» большого трения), то оно будет поворачиваться вместе с маятником, и период колебаний станет больше. Проведем энергетический расчет. Пусть угловая скорость составляет ω, тогда полная кинетическая энергия равна сумме энергии центра масс $M\omega^2L^2/2$ и энергии вращения колеса относительно центра масс

$M\omega^2R^2/2$. Всего получается

$$W = \left(1+\frac{R^2}{L^2}\right)\frac{M\omega^2L^2}{2}.$$

Потенциальная энергия в обоих случаях рассчитывается одинаково. Видно, что по сравнению с первым случаем угловая скорость в любом месте траектории получается в одно и то же число раз меньше. Ясно, что во столько же раз возрастет и период колебаний:

$$T_1 = T_0\sqrt{1+\frac{R^2}{L^2}}.$$

А.Зильберман

Ф1841. *С помощью бензиновой горелки в помещении поддерживается температура $t_1 = -3$ °C при температуре на улице $t_2 = -23$ °C. Предполагается использовать бензин в движке с КПД $\eta = 0,4$, а с помощью полученной механической энергии запустить тепловой насос, перекачивающий по идеальному холодильному циклу тепло с улицы в комнату. Какую температуру удастся в таком случае поддерживать в помещении при прежнем расходе бензина? Движок находится вне помещения.*

Мощность теплового потока из комнаты пропорциональна разности комнатной и уличной температур, т.е. в установившемся режиме при использовании горелки можно записать

$$N = k(T_1 - T_2),$$

где N – мощность горелки, k – коэффициент пропорциональности.

Идеальный холодильник работает по обратному циклу Карно. Пусть N_0 – мощность, отнимаемая агрегатом у окружающей среды, тогда

$$\frac{\eta N}{N_0} = \frac{T_3 - T_2}{T_2}, \text{ откуда } N_0 = \frac{T_2\eta N}{T_3 - T_2}.$$

В установившемся режиме мощность теплового потока в комнату равна

$$N' = N_0 + \eta N = k(T_3 - T_2).$$

Подставив сюда выражения для N_0 и N и сократив на k, получим

$$\frac{T_2\eta(T_1 - T_2)}{T_3 - T_2} + \eta(T_1 - T_2) = T_3 - T_2.$$

Из этого квадратного относительно T_3 уравнения найдем искомую температуру:

$$T_3 = 299 \text{ K, или } t_3 = 26 \text{ °C}.$$

Второе решение $T_3' = 209$ K, или $t_3' = -64$ °C, отвечает работе агрегата на охлаждение комнаты.

В.Белонучкин

Ф1842. *Две тонкие медные проволоки одинаковой длины соединили параллельно и подключили последовательно с лампочкой к источнику постоянного напряжения. Первая проволока нагрелась на 16 °C выше комнатной температуры, а вторая – в $\alpha = 2$ раза меньше. На сколько градусов выше комнатной температуры нагреются проволоки, если их параллельное соединение заменить последовательным? Сопротивление каждой из проволок много меньше сопротивления лампочки и источника, зависимость сопротивления проволок от температуры не учитывать.*

Пусть r_1 и r_2 – радиусы проволок, l – их длина. Тогда сопротивления проволок составляют

$$R_1 = \frac{\rho l}{\pi r_1^2},\ R_2 = \frac{\rho l}{\pi r_2^2}.$$

Мощности электрического тока, выделяющиеся на каждой из проволок при параллельном соединении, равны

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{U^2\pi r_1^2}{\rho l},\ P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{U^2\pi r_2^2}{\rho l},$$

где U – напряжение на проволоках. В установившемся режиме, когда первая проволока нагрелась на Δt_1, а вторая на Δt_2, вся мощность электрического тока уходит через боковые поверхности проволок и идет на нагревание окружающей среды:

$$P_1 = k\cdot 2\pi r_1 l\Delta t_1,\ P_2 = k\cdot 2\pi r_2 l\Delta t_2,$$

где k – коэффициент пропорциональности. Тогда получим

$$U^2 r_1 = 2k\rho l^2\Delta t_1,\ U^2 r_2 = 2k\rho l^2\Delta t_2,$$

или

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \alpha.$$

Следовательно, отношение токов через проволоки при параллельном соединении равно

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{U/R_1}{U/R_2} = \frac{R_2}{R_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \alpha^2.$$

Поскольку сопротивление каждой из проволок много меньше сопротивления лампочки и источника, при замене параллельного соединения на последовательное сила общего тока в цепи не изменится:

$$I = I_1 + I_2 = \left(1+\alpha^2\right)I_2.$$

Нагрев проволок (от комнатной температуры) в обоих случаях прямо пропорционален выделяющейся на них мощности электрического тока:

$$\frac{\Delta t_1'}{\Delta t_1} = \frac{P_1'}{P_1} = \frac{I^2R_1}{I_1^2R_1} = \left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}\right)^2,$$

$$\frac{\Delta t_2'}{\Delta t_2} = \frac{P_2'}{P_2} = \frac{I^2R_2}{I_2^2R_2} = \left(\alpha^2+1\right)^2,$$

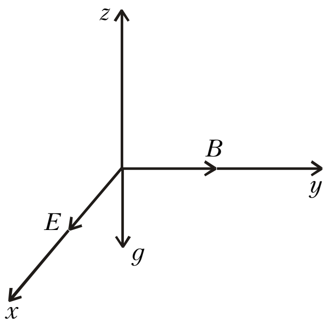
где штрихованные переменные относятся к последовательному подключению проволок. Отсюда находим

$$\Delta t_1' = \left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}\right)^2\Delta t_1 = 25 \text{ °C},$$

$$\Delta t_2' = \left(\alpha^2+1\right)^2\frac{\Delta t_1}{\alpha} = 200 \text{ °C}.$$

В.Ефимов

Ф1843. *Частица массой m с зарядом q движется с постоянной по модулю скоростью в области пространства, где имеются три взаимно перпендикулярных поля: электрическое с напряженностью $\vec{E}$, магнитное с индукцией $\vec{B}$ и поле тяжести $\vec{g}$ (см. рису-*



нок). В некоторый момент поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ выключают. Минимальная кинетическая энергия частицы в процессе движения составляет половину начальной. Найдите проекции скорости частицы на направления всех трех полей в момент выключения.

Результирующая сила $\vec{F}$, действующая на частицу со стороны полей $\vec{E}$ и $\vec{g}$, постоянна по модулю и направлению. Сила Лоренца не совершает работы, поэтому частица должна двигаться в плоскости, перпендикулярной силе $\vec{F}$, чтобы не изменялась абсолютная величина ее скорости. Вектор магнитной индукции тоже лежит в этой плоскости, значит, частица движется прямолинейно, т.е. равнодействующая всех сил равна нулю. Запишем это условие в проекции на ось x:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = qE - qv_zB = 0 \text{, и } v_z = \frac{E}{B}.$$

Когда кинетическая энергия достигает минимума, скорость частицы направлена горизонтально. В начальный момент времени кинетическая энергия частицы в 2 раза больше, значит, вертикальная и горизонтальная составляющие начальной скорости одинаковые. Поэтому

$$v_0 = \sqrt{2}\,v_z = \frac{E\sqrt{2}}{B}.$$

При движении в скрещенных полях силы, действующие на частицу вдоль оси z, скомпенсированы:

$$mg = qv_xB \text{, и } v_x = \frac{m}{q}\frac{g}{B}.$$

Составляющую скорости v_y найдем из условия

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v_0^2,$$

откуда

$$v_y = \sqrt{\left(\frac{E}{B}\right)^2 - \left(\frac{m}{q}\frac{g}{B}\right)^2}.$$

А.Шеронов

Ф1844. *Коллекторный двигатель питается от источника постоянного напряжения $U = 12$ В. На холостом ходу сила тока через обмотки ротора равна $I_1 = 4$ А. Когда ротор затормозили до полной остановки, сила тока увеличилась до $I_2 = 24$ А. Какую наибольшую полезную механическую мощность можно получить с помощью этого двигателя, если магнитное поле в нем создается постоянными магнитами, а момент сил трения в подшипниках ротора не зависит от скорости его вращения и от механической нагрузки?*

Возникающая в обмотках ротора ЭДС прямо пропорциональна угловой скорости его вращения: $\mathcal{E} = \alpha\omega$. Поэтому при полной остановке ротора ток через обмотки определяется только их активным сопротивлением $R = U/I_2$. Пусть ω_1 – угловая скорость вращения ротора при работе двигателя на холостом ходу. Тогда из закона Ома

$$U = \alpha\omega_1 + I_1R$$

находим

$$\alpha = \frac{U - I_1R}{\omega_1}.$$

В этом случае работа источника идет на выделение тепла в обмотках и на преодоление сил трения, поэтому из закона сохранения энергии

$$UI_1 = M\omega_1 + I_1^2R$$

находим момент сил трения:

$$M = \frac{UI_1 - I_1^2R}{\omega_1}.$$

Когда двигатель нагружен и вращается с угловой скоростью ω, из закона Ома для силы тока в обмотках получаем

$$I = \frac{U - \alpha\omega}{R}.$$

Полезная мощность двигателя в этом случае равна

$$P(\omega) = UI - I^2R - M\omega = -\frac{\alpha^2}{R}\omega^2 + \left(\frac{\alpha U}{R} - M\right)\omega.$$

Это – квадратичная функция, поэтому мощность будет максимальна при

$$\omega = \omega_m = \frac{\alpha U - MR}{2\alpha^2}.$$

Подставив в $P(\omega)$ выражения для R, α, M и ω_m, получим

$$P_m = P(\omega_m) = \frac{UI_2}{4}\left(1 - \frac{I_1}{I_2}\right)^2 = 50 \text{ Вт}.$$

В.Ефимов

Ф1845. *С одной из пластин изначально незаряженного конденсатора, подключенного выводами к катушке индуктивностью L, мгновенно отделяется тонкий слой вещества, несущий заряд q. Затем он движется поступательно как целое с постоянной скоростью v по направлению к противоположной пластине (рис.1). Найдите зависимость тока через катушку от времени, пока слой движется в конденсаторе. Расстояние между пластинами конденсатора d, площадь поперечного сечения пластин S.*

Сразу после отделения слоя вещества ток в цепи будет равен нулю, заряд на левой пластинке будет равен $-q$, а на правой заряда не будет.

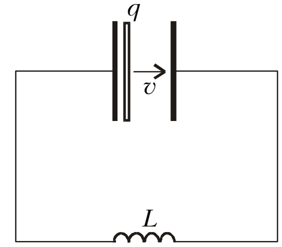


Рис.1

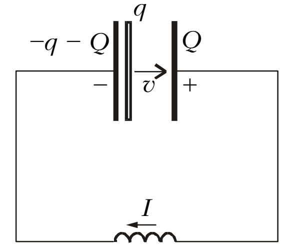


Рис.2

Теперь рассмотрим произвольный момент времени (рис.2). По закону сохранения заряда, если на правой пластине появится заряд Q, то на левой появится заряд $-q-Q$. Напряжение на конденсаторе будет создаваться полями трех заряженных пластин:

$$U_C = \frac{q+Q}{2\varepsilon_0 S}d + \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}d + \frac{q}{2\varepsilon_0 S}vt - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}(d-vt) = \frac{Qd+qvt}{\varepsilon_0 S},$$

где t – время, которое отсчитывается от момента отделения слоя. Запишем закон Ома для нашей цепи:

$$L\frac{dI}{dt} = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} + \frac{qvt}{\varepsilon_0 S}.$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по t:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{d}{\varepsilon_0 SL}I = \frac{qv}{\varepsilon_0 SL}.$$

Общее решение этого дифференциального уравнения запишем в виде

$$I(t) = \frac{qv}{d}\left(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + 1\right), \text{ где } \omega_0^2 = \frac{d}{\varepsilon_0 SL}.$$

Из начальных условий, а именно $I=0$ и $dI/dt=0$ при $t=0$, найдем константы A и B и окончательно получим

$$I(t) = \frac{qv}{d}\left(1-\cos\omega_0 t\right).$$

В.Можаев

Ф1846. *Два одинаковых трансформатора содержат по две обмотки, одна из которых имеет в 2 раза больше витков, чем другая. Одну из обмоток первого трансформатора подключают к сети переменного напряжения 220 В, к другой обмотке этого трансформатора подсоединяют последовательно с резистором сопротивлением 200 Ом одну из обмоток второго трансформатора, а к выводам второй обмотки этого трансформатора подключают идеальный амперметр переменного тока. Что покажет прибор?*

Идеальный амперметр имеет нулевое сопротивление, поэтому напряжения обеих обмоток второго трансформатора получатся нулевыми Это возможно только в том случае, когда магнитный поток через сердечник этого трансформатора вообще не меняется (для переменного тока это нулевой магнитный поток). А это означает, что магнитные поля двух обмоток компенсируют друг друга и, следовательно, через обмотку с двойным числом витков течет вдвое меньший ток.

Теперь рассмотрим схему с двумя трансформаторами. Пусть первый трансформатор включен в сеть как понижающий. Тогда напряжение его вторичной обмотки равно 110 В, все это напряжение приложено к резистору, и ток через него, а значит и через подключенную последовательно с ним обмотку второго трансформатора, составит 110 В/200 Ом = 0,55 А. В зависимости от варианта включения обмоток второго трансформатора ток через амперметр будет или вдвое больше (если трансформатор включен как понижающий), или вдвое меньше. Если первый трансформатор включить как повышающий, то напряжение на резисторе составит 440 В, и через него пойдет ток 2,2 А. Опять получатся два варианта.

Итак, возможные значения тока амперметра таковы: 0,275 А; 1,1 А; 1,1 А; 4,4 А. При расчетах мы полагали трансформаторы идеальными, но при таких больших токах сделать трансформатор с малыми потерями довольно трудно – и сопротивления проводов обмоток должны быть совсем малыми, и сильные магнитные поля больших токов могут ввести ферромагнитный сердечник трансформатора в насыщение.

Р.Александров

Ф1847. *Говорят, что в архиве Снеллиуса нашли оптическую схему, на которой были изображены линза, предмет и его изображение. От времени чернила высохли, и остался только предмет на масштабной сетке (рис.1). Из текста следует, что предмет и изображение одинаковых размеров и формы, а главная оптическая ось параллельна некоторым линиям масштабной сетки. Восстановите оптическую схему (изображение, линзу, фокусы).*

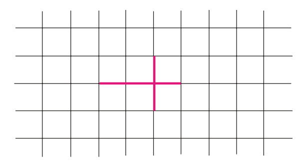


Рис.1

Один из отрезков предмета перпендикулярен главной оптической оси линзы, поэтому его изображение тоже перпендикулярно ей. Чтобы поперечное увеличение этого отрезка было единичным, он должен находиться на расстоянии $2F$ линзы, причем $F > 0$. Второй отрезок и его изображение параллельны главной оптической оси, а это возможно, лишь если они лежат на ней.

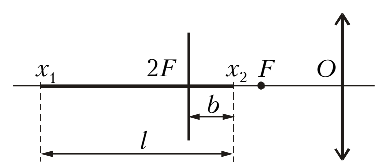


Рис.2

Пусть l – длина отрезка креста вдоль главной оптической оси, x_1, x_2 – координаты его концов, b – часть отрезка между точками $2F$ и x_2 (рис.2), a – размер клетки сетки. В зависимости от ориентации креста относительно линзы возможны три значения отношения $\alpha = b/l$, а именно: $\alpha_1 = 1/3$, $\alpha_2 = 2/3$, $\alpha_3 = 1/2$. Условие равенства длин отрезка креста вдоль оси и его изображения запишем в виде

$$l = \frac{x_2 F}{x_2 - F} - \frac{x_1 F}{x_1 - F},$$

или после преобразований –

$$lx_1x_2 + lF^2 - lF(x_1+x_2) = (x_1-x_2)F^2.$$

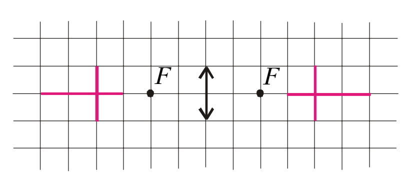
Подставив сюда $x_1 = x_2 + l$, получим

$$x_2(x_2+l) - F(2x_2 - l) = 0.$$

Теперь подставим $x_2 = 2F - \alpha l$ и найдем F:

$$\alpha^2 l - 2\alpha F + F - \alpha l = 0, \text{ и } F = \frac{\alpha(1-\alpha)l}{1-2\alpha}.$$

Поскольку $F>0$, то $\alpha = 1/3$ (для других α получается $F<0$), чему соответствует $l = 3a$. Отсюда $F = 2a$, после чего легко восстанавливается вся оптическая схема (рис.3).



А.Чудновский Рис.3