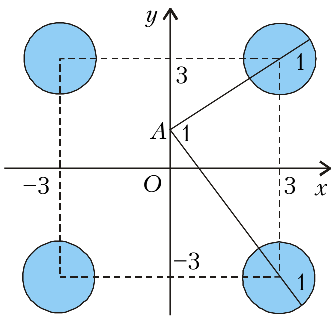

Рис. 20

Все множество M, состоящее из четырех кругов, изображено на рисунке 20. Равенство системы, которое можно переписать в виде

$$x^2+(y-1)^2=a^2,$$

является уравнением окружности с центром в точке $A=(0;1)$ и радиусом, равным $|a|$.

Расстояние r_1 от точки A до точек ближнего к ней круга (например, находящегося в первой четверти), принимает значения

$$\sqrt{3^2+2^2}-1=\sqrt{13}-1\le r_1\le\sqrt{3^2+2^2}+1=\sqrt{13}+1,$$

а расстояние r_2 от точки A до точек дальнего круга (например, с центром в $(3;-3)$) изменяется в пределах

$$\sqrt{3^2+4^2}-1=4\le r_2\le\sqrt{3^2+4^2}+1=6.$$

У системы решения существуют тогда и только тогда, когда окружность имеет непустое пересечение с множеством M. Таким образом, поскольку $\sqrt{13}-1<4<\sqrt{13}+1<6$, то необходимым и достаточным условием разрешимости системы является требование

$$\sqrt{13}-1\le|a|\le6.$$

Вариант 17

1. 9 км/ч. **2.** $5/2$.
3. $\left(-\infty;-\sqrt{17}\right)\cup[-4;-3)\cup(-3;3)\cup\left(\sqrt{17};5\right]$.
4. 9. **5.** 5 ч и 7 ч 30 мин.
6. -4; 4; 6. *Указание*. Если $(x_0;y_0)$ – решение системы, то $(x_0;-y_0)$ – тоже решение. Необходимым условием для нечетности числа решений является существование решения, для которого $y_0=-y_0$, т.е. $y_0=0$. Осталось подставить $y=0$ в систему и выяснить, при каких a количество решений равно трем. Возможные значения a находим из системы

$$\begin{cases}(3x-3)(x-9)=0,\\(x-a)^2=25.\end{cases}$$

Это: -4, 4, 6, 14.

Теперь перепишем исходную систему:

$$\begin{cases}(3x+|y|-3)(x+3|y|-9)=0,\\(x-a)^2+y^2=25,\\x\ge0.\end{cases}$$

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют первому уравнению, – это четырехугольник $ABCD$, показанный на рисунке 21. Второе уравнение – окружности с центром в точке $(a;0)$ и радиусом 5.

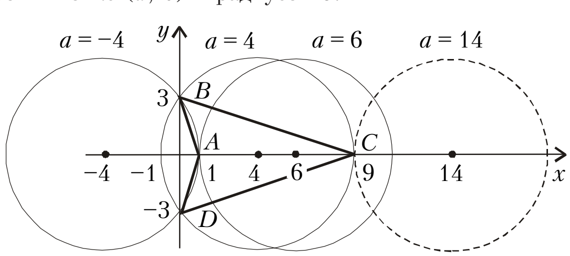

Рис. 21

7. (8, 0, 1, 0, 1). Описание процедуры дележа начнем со случая, когда число участвующих в нем равно двум. В этом случае старший пират забирает все золото – половина (он сам) поддерживает его предложение. Таким образом, итог дележа (10, 0).

В случае, если число пиратов равно трем, старший пират предлагает дележ, дающий 9 слитков ему и 1 слиток младшему (младший, понимая, что если он поддержит среднего пирата, то в итоге не получит ничего, вынужден с этим предложением согласиться). Тем самым, итог дележа (9, 0, 1). В случае, если число пиратов равно четырем, старший пират рассуждает так: «Если мое предложение будет отвергнуто, то три оставшихся пирата разделят золотые слитки по правилу (9, 0, 1); следовательно, я должен предложить такой дележ, который был бы выгоднее хотя бы одному из них, а мне давал бы наибольшую возможную долю». Единственное решение этой задачи – дележ (9, 0, 1, 0), в котором старший пират жертвует лишь одним слитком (в пользу пирата, третьего по старшинству).

Рассуждая подобным образом в случае пяти пиратов, в итоге получаем ответ: (8, 0, 1, 0, 1).

ФИЗИКА

Физический факультет

1. По условию задачи при движении точки A нити катушка катится без проскальзывания, сохраняя ориентацию своей оси. Следовательно, считая, как это обычно и делается в подобных задачах, катушку твердым телом, ее движение можно представить как сумму поступательного движения со скоростью u и вращения с некоторой угловой скоростью ω вокруг оси катушки. Катушка катится без проскальзывания, поэтому геометрическое место точек касания катушкой плоскости (считаем, конечно, плоскость абсолютно твердой) является мгновенной осью вращения, а величина угловой скорости вращения катушки равна

$$\omega=u/R.$$

Участок нити между точкой B ее касания средней части катушки и точкой A (рис.22) можно считать прямолинейным и утверждать, что сила натяжения нити в момент начала движения катушки должна образовывать с горизонтом тот же угол, что и касательная к нити в точке A. Поскольку иное специально не оговорено в условии задачи, будем считать указанный отрезок нити целиком расположенным в вертикальной плоскости, перпендикулярной оси катушки. Тогда, как это видно из рисунка, момент силы натяжения нити должен заставить катушку вращаться по часовой стрелке. Следовательно, учитывая нерастяжимость нити, можно утверждать, что

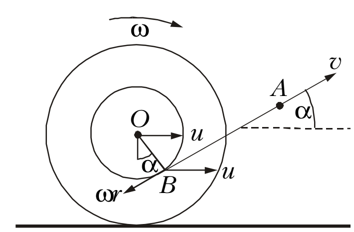

Рис. 22

$$v=u\cos\alpha-\omega r.$$

Отсюда находим искомую скорость движения оси катушки:

$$u=\frac{v}{\cos\alpha-1/n}=\frac{2v}{\sqrt{3}-1}.$$

2. Будем решать задачу при следующих стандартных предположениях: действием воздуха на тела системы можно пренебречь, а лабораторную систему отсчета, относительно которой оси колес неподвижны, можно считать инерциальной. Поскольку нить является шероховатой, при движении груза она не скользит по ободам колес. Из условия задачи следует, что в течение интересующего нас промежутка времени груз после отпускания движется поступательно вертикально вниз. Поэтому, учитывая, что ободы тонкие, нить нерастяжимая и тонкая, можно утверждать, что величины линейных скоростей точек ободов колес, груза и точек нити в указанные моменты времени должны быть одинаковыми.