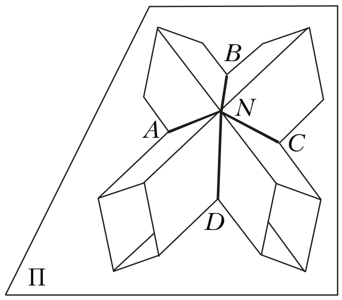

Рис. 16

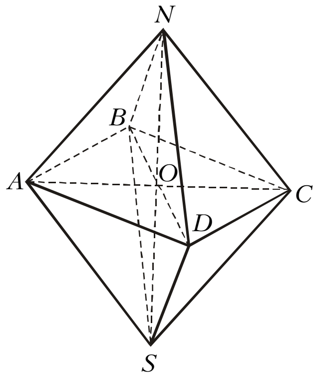

Рис. 17

венство (2) имеет единственное решение. В силу однозначности выражения x через u при указанном значении параметра a у неравенства (1) решение также единственно.

7. $\frac{2}{3}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Для того чтобы понять, объем какого тела требуется вычислить в задаче, сначала представим себе фигуру, которая получается при пересечении двух равных призматических поверхностей (перпендикулярные сечения которых суть квадраты со стороной 1), положенных на плоскость Π в виде косого креста – так, как показано на рисунке 16. Эта фигура образована двумя равными четырехугольными пирамидами с общим основанием $ABCD$, все боковые грани которых наклонены к нему под углом 45°, отрезок NS перпендикулярен плоскости Π, а четырехугольник $ABCD$ – ромб, лежащий в плоскости, параллельной плоскости Π (рис.17). Острый угол этого ромба равен углу между ребром куба и его диагональю:

$$\angle ABC = 2\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Стороны ромба равны длине этой диагонали: $\sqrt{3}$.

Общей частью двух кубов является лишь часть тела, которое составлено из двух равных четырехугольных пирамид с общим основанием $BEFG$ (рис. 18, где изображено сечение об-

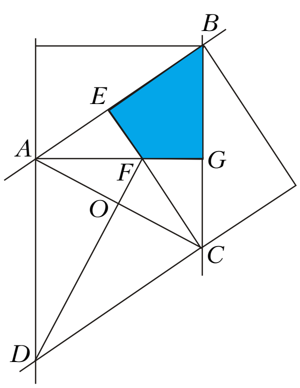

Рис. 18

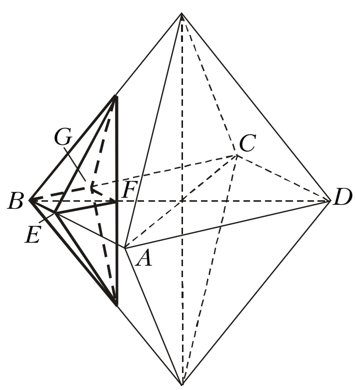

Рис. 19

щей конструкции плоскостью, параллельной плоскости Π, и рис.19, где изображено искомое тело). Это следует из того, что длина отрезка BF меньше длины отрезка BO:

$$BF = \frac{1}{\cos\alpha} < BO = \sqrt{3}\cos\alpha,$$

так как

$$\cos^2\alpha = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Поскольку катеты прямоугольного треугольника BEF равны $BE = 1$ и $EF = 1\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ соответственно, а высота интересующей нас пирамиды равна EF, то искомый объем равен

$$V = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Вариант 14

1. $\left[-1;\left(5+\sqrt{13}\right)/2\right)$. **2.** $(11;+\infty)$.

3. 0. **4.** 1.

5. $2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение приводится к виду

$$(\cos 5x-2)(2\cos x-3)=1,$$

откуда

$$2-\cos 5x = 1,\ 3-2\cos x = 1.$$

6. 2. *Указание*. Пусть a и $-b$ – выражения, стоящие под знаком модуля. Уравнение переписывается так:

$$|a|+|-b|-a-b+c^2=0,\ \text{где}\ c=x-2,$$

или

$$\left(|a|-a\right)+\left(|b|-b\right)+c^2=0,$$

откуда

$$|a|=a,\ |b|=b,\ c=0.$$

Вариант 15

1. 2. **2.** $(2;5/2)\cup(5/2;3)$. **3.** 60°.

4. 15 кг. **5.** $2R^2\cos\alpha\left(\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{1+\sin^2\alpha}\right)$; 54.

6. –1; –5/7; –3. *Указание*. При $a=-1$ условие выполнено. При $a\neq -1$ произведение корней, т.е. $x_1x_2=\frac{a+3}{a+1}=1+\frac{2}{a+1}$ должно быть целым. Также должно быть целым число

$$x_1+x_2=\frac{a-1}{a+1}=1-\frac{2}{a+1}.$$

Откуда

$$x_1+x_2+x_1x_2=2,$$

или

$$(x_1+1)(x_2+1)=3.$$

Вариант 16

1. $(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$. **2.** $\pi n/3$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $(-\infty;-1]\cup\{2\}$.

4. $\left(-\frac{15}{16};\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-1\right)\cup\left(\sqrt[4]{2}-1;15\right)$. *Указание*. Выполните замену $t=\log_2(x+1)$, а затем решите полученное неравенство относительно $|t|$.

5. $\sqrt{190}/2$.

6. $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{6};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{4}\right)$; первое число больше. *Указание*. Выполните замену переменной $u=\arcsin 2y$, $v=\arccos 3x$, воспользуйтесь равенством $\arccos a+\arcsin a=\pi/2$.

7. $\left[-6;1-\sqrt{13}\right]\cup\left[\sqrt{13}-1;6\right]$. Если $(x;y)$ – решение неравенства данной системы, то $(x;-y)$, $(-x;y)$, $(-x;-y)$ также его решения. Таким образом, множество M точек плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют неравенству, симметрично относительно обеих осей Ox и Oy.

Пусть $x\geq 0$, $y\geq 0$. Тогда исходное неравенство превращается в неравенство

$$x^2+y^2-6x-6y+17\leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-3)^2\leq 1,$$

которое задает круг единичного радиуса с центром в точке $(3;3)$.