в точке A окрашенные точки образуют 2 серии – это точки вида $x = 30\pi n$ и $x = 40\pi k$, $n,k \in \boldsymbol{N}$. Подсчитайте количество точек первой и второй серий, принадлежащих AB, и вычтите из суммы этих количеств число точек, принадлежащих пересечению двух упомянутых серий.

5. а) 3; б) $\frac{\pi}{3} \pm \arccos\frac{5}{6}$. *Указание*. Из подобия треугольников PQR и QTR следует, что $QT = \sqrt{PR \cdot TR}$ и что описанная около треугольника PQT окружность касается в точке Q прямой RQ. При вычислении угла QRP учтите, что RQ и RP могут находиться как по одну сторону от прямой OR, так и по разные стороны от нее.

6. $(0;0)$, $(\pm 2;\mp 2)$, $(\pm\sqrt{6};\pm\sqrt{6})$, $\left(\frac{(\pm\sqrt{3})+(\pm\sqrt{7})}{2};\frac{(\pm\sqrt{3})-(\pm\sqrt{7})}{2}\right)$ – всего 9 решений. *Указание*. Сложив и вычтя уравнения системы, получим систему

$$\begin{cases}(x+y)\left(x^2-xy+y^2-6\right)=0,\\(x-y)\left(x^2+xy+y^2-4\right)=0,\end{cases}$$

равносильную совокупности из четырех систем

$$\begin{cases}x-y=0,\\x+y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=0,\\x^2+xy+y^2=4;\end{cases}\quad\begin{cases}x^2-xy+y^2=6,\\x-y=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-xy+y^2=6,\\x^2+xy+y^2=4.\end{cases}$$

Последняя из четырех равносильна системе

$$\begin{cases}x^2+y^2=5,\\2xy=-2.\end{cases}$$

Вариант 12

1. $(0;1)\cup(\pi/2;2]$. **2.** $9\left(3+\sqrt{3}\right)$.

3. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $n,k\in\boldsymbol{Z}$.

4. $(-1;\ 0)$.

5. а) $232+288\sqrt{2}$; б) $\frac{144\pi\left(5\sqrt{2}+7\right)}{7}$. *Указание*. Докажите, что радиусы шаров образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

6. 2. *Указание*. Словарный запас людоеда составит через полгода $300(1+p/100)$, а через год $300(1+p/100)^2$ слов. Месячный прирост словарного запаса Эллочки $150(1+p/100)$ слов. Из того что все эти числа должны быть целыми, следует, что $p=10k$, где k – натуральное число. Мы должны найти такое n, при котором неравенство

$$300(1+p/100)^2 > 30+150n(1+p/100)$$

выполняется для всех $p=10k$, $k\in\boldsymbol{N}$. После преобразований получим

$$n<\frac{k^2+20k+90}{5k+50}=\frac{k}{5}+2-\frac{2}{k+10}\le 2\frac{1}{55}$$

(функция, стоящая справа, – возрастающая). Итак, $n\le 2$.

Вариант 13

1. Утверждение справедливо. **2.** $\left[-\frac{1}{2};0\right]\cup\left[\frac{7}{3};\frac{5}{2}\right)$.

3. $(-2;\ 3)$, $(-3;\ 2)$, $(-1;\ 5)$ $(-5;\ 1)$. *Указание*. Выполните замену $u = x - y$, $v = xy$.

4. 20 рабочих, 6 часов.

5. $\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi l$, $\frac{\pi}{18}+2\pi m$, $\frac{17\pi}{18}+2\pi n$, $k,l,m,n\in\boldsymbol{Z}$.

Указание. Приведите уравнение к виду

$$\left(\log_2\sin 3x+1\right)\left(\log_2\cos 2x+1\right)=0.$$

6. $\sqrt{3/2}$. Пусть $f(x)$ и $g(y)$ – левая и правая части данного неравенства соответственно. Перепишем его в краткой форме:

$$f(x)\ge g(y). \qquad (1)$$

Пусть $u=x^2-6ax+10a^2$, тогда левая часть неравенства принимает вид

$$\varphi(u)=\sqrt[4]{u}+\sqrt[4]{3-u}.$$

Так как при $u\in[0;3]$ справедливо равенство $\varphi(u)=\varphi(3-u)$, то наряду с решением $(u;y)$ неравенство

$$\varphi(u)\ge g(y) \qquad (2)$$

имеет решение $(3-u;y)$. Поэтому необходимым условием единственности решения (2) является требование $u=3-u$, или $u=3/2$.

В свою очередь, уравнение

$$u=3/2 \Leftrightarrow x^2-6ax+10a^2-\frac{3}{2}=0,$$

определяющее зависимость x от данного u, имеет единственное решение при условии, что дискриминант квадратного трехчлена

$$D=-4a^2+6=0\text{, т.е. } a=\pm\sqrt{3/2}.$$

Таким образом, получены необходимые условия единственности решения неравенства (1).

Для исследования достаточности покажем сначала, что

$$\varphi(u)\le\varphi(3/2)=\sqrt[4]{24}\text{ для } u\in[0;3]. \qquad (3)$$

Обозначим $p=\sqrt[4]{u}\ge 0$, $q=\sqrt[4]{3-u}\ge 0$. При этом $p^4+q^4=3$. Требуется найти максимальное значение суммы $p + q$.

С помощью неравенств $2p^2q^2\le p^4+q^4$, $2pq\le p^2+q^2$ оценим

$$(p+q)^4=p^4+q^4+6p^2q^2+4pq\left(p^2+q^2\right)\le$$

$$\le 4\left(p^4+q^4\right)+2\left(p^2+q^2\right)^2\le 6\left(p^4+q^4\right)+4p^2q^2\le 8\left(p^4+q^4\right)=24.$$

Тогда $p+q\le\sqrt[4]{24}$, причем равенство достигается при $p=q=\sqrt[4]{3/2}$. Отсюда следует искомое неравенство (3).

Рассмотрим теперь каждое из найденных значений a.

При $a=-\sqrt{3/2}$ правая часть исходного неравенства принимает вид

$$g(y)=\sqrt[4]{24-\frac{6}{\sqrt{2}}+\left|y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right|+\left|y+\frac{3}{\sqrt{2}}\right|}\ge\sqrt[4]{24},$$

поскольку, как нетрудно убедиться,

$$\left|y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right|+\left|y+\frac{3}{\sqrt{2}}\right|\ge\frac{6}{\sqrt{2}},$$

причем

$$\left|y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right|+\left|y+\frac{3}{\sqrt{2}}\right|=\frac{6}{\sqrt{2}}$$

при $y\in\left[-\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right]$.

Так как для всех $y\in\left[-\frac{3}{\sqrt{2}};\frac{3}{\sqrt{2}}\right]$ правая часть (2) принимает значение $g(y)=\sqrt[4]{24}$, то неравенство $\varphi(u)\ge g(y)$ (а с ним и неравенство (1)) имеет более одного решения.

При $a=\sqrt{3/2}$ выражение $g(y)$ записывается в виде

$$g(y)=\sqrt[4]{24+2\left|y-\frac{3}{\sqrt{2}}\right|}\ge\sqrt[4]{24},$$

причем $g(y)=\sqrt[4]{24}$ только для $y=\frac{3}{\sqrt{2}}$. В этом случае нера-