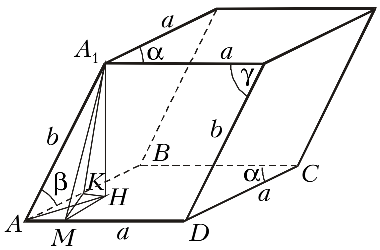

Рис. 10

Откуда

$$\sin\beta = \sin\gamma = \frac{a}{b}\sin\alpha .$$

Для высоты $h = A_1H$ параллелепипеда получим по теореме Пифагора $h = \sqrt{A_1A^2 - AH^2}$. Чтобы вычислить AH, примените теорему синусов к треугольнику KAM: $AH = KM/\sin\alpha$. Отрезок KM найдите по теореме косинусов из треугольника KAM:

$$KM = b\sqrt{2}\,|\cos\beta|\,\sqrt{1-\cos\alpha} .$$

Окончательно, после упрощений получим

$$h = b\sqrt{1 - \frac{2\cos^2\beta(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}} .$$

Преобразуем функцию

$$f = \frac{2\cos^2\beta(1-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha}$$

к виду

$$f = \left(\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}} - \frac{2a}{b}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{4a}{b} - \frac{4a^2}{b^2} .$$

Ясно, что $f \ge \frac{4a}{b}\left(1 - \frac{a}{b}\right)$, причем равенство достигается лишь при $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2a}$. При $a = 4$ и $b = 3$ это возможно. Осталось вычислить $r = \frac{h}{2}$.

Вариант 4

1. $-\sqrt{2}$.

2. $[-1; -7/8] \cup \{1\}$. *Указание*. Приведите неравенство к виду $\sqrt{1-x}\left(2\sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le 0$.

3. $\arccos\frac{29}{7\sqrt{19}}$. *Указание*. Введите в пространстве прямоугольную систему координат, направив оси Ox, Oy и Oz по ребрам AD, AB, AA_1 , запишите координаты векторов $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{KL}$, после чего воспользуйтесь формулой для скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

4. 10 ч 40 мин того же дня.

5. $\left(\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi k; (-1)^n \arcsin\frac{4}{5} + \pi n\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. После замены $a = \sqrt{13\cos x + 98\sin y}$, $b = \sqrt{13\cos x + 28\sin y}$ система приобретает вид

$$\begin{cases} a - b = 4, \\ 2b - \sqrt{a^2 - b^2 + 8} = 2 \end{cases}$$

и легко решается: $a = 9$, $b = 5$, после чего без труда находятся $\cos x$ и $\sin y$.

6. $7\sqrt{3}$. Обозначим стороны данного треугольника, лежащие против вершин A, B и C, через a, b и c соответственно (рис 11). Из условия задачи следует $c > b$. Пусть $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$, $\angle ADC = \beta$. Тогда $\angle B = \beta - \alpha$. Так как $c > b$, то $\beta < \pi/2$. Пусть окружность радиуса r, центр O которой лежит на прямой BC, проходит через точки A, D. Точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AD, следовательно, на луче DC. Поскольку треугольник OAD – равнобедренный, то $\angle DAO = \beta$. Из вышесказанного следует $\beta > \alpha$, поэтому точка C лежит на прямой BC между точками D и O. Тогда $\angle CAO = \beta - \alpha$, следовательно, треугольник ABO подобен треугольнику CAO. Значит,

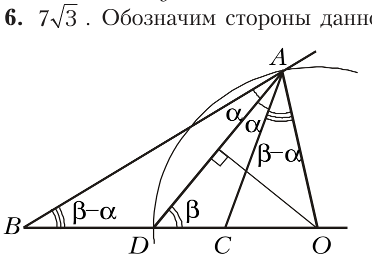

Рис. 11

$$\frac{r + BD}{r} = \frac{r}{r - CD} . \qquad (*)$$

Далее, по свойству биссектрисы треугольника ABC имеем

$$BD = \frac{ac}{b+c} , \quad CD = \frac{ab}{b+c} .$$

Подставляя эти выражения для BD и CD в $(*)$, получаем

$$\left(r + \frac{ac}{b+c}\right)\left(r - \frac{ab}{b+c}\right) = r^2 \Leftrightarrow r\left(c^2 - b^2\right) = abc .$$

Применяя формулу $R = \frac{abc}{4S}$, где S – площадь треугольника ABC, а R – радиус описанной окружности, находим $R = \frac{r\left(c^2 - b^2\right)}{4S}$. Теперь, используя данные из условий задачи, получаем ответ: $R = 7\sqrt{3}$.

Вариант 5

1. 3. **2.** $\pi(4n \pm 1)/4$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** -9, $\left(-1 + \sqrt{33}\right)/2$.

4. $\sqrt{7}$. **5.** (1; 27). **6.** 4/9.

7. $(a+1; 0) \cup (-a-3; +\infty)$ при $a \le -3$; $(a+1; 0) \cup (0; +\infty)$ при $-3 < a < -2$; $(0; +\infty)$ при $a = -2$; $(-a-3; a+1) \cup (0; +\infty)$ при $-2 < a < -1$; $(-a-3; 0) \cup (a+1; +\infty)$ при $a \ge -1$.

Указание. Поскольку знак выражения $\sin x + 2x$ совпадает со знаком x, неравенство равносильно такому:

$$x(x - a - 1)(x + a + 3) > 0 .$$

Осталось рассмотреть все возможные случаи расположения точек 0, $a + 1$ и $-a - 3$ на числовой оси и применить в каждом из случаев метод интервалов.

8. 2/3; $4\sqrt{15}/15$.

Вариант 6

1. $\pi(2n+1)/10$, $(-1)^n \pi/15 + \pi n/5$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. $(-\infty; 1) \cup (3/2; 2]$. **3.** $\left(0; \log_{3/4}(1/4)\right)$. **4.** 9/2.

5. 4, 8, 16; 16, 8, 4. **6.** $3\sqrt{6}/4$.

7. 1) $x \in \boldsymbol{R}$ при $-3 < a < -2$;

$$\left(-\infty; 3 - \sqrt{a^2 + 5a + 6}\right) \cup \left(3 + \sqrt{a^2 + 5a + 6}; +\infty\right)$$

при $a \le -3$ и $a > -2$.

2) $\frac{-5 - \sqrt{13}}{2} < a \le -3$; $-2 \le a < \frac{-5 + \sqrt{13}}{2}$.

8. 6.

Вариант 7

1. 1/4; 1/2. **2.** (1; 1). **3.** $(-4; -3{,}9] \cup \left(4; \sqrt{17}\right)$.

4. $\frac{2\pi n}{7}$, $\frac{2\pi m}{9}$, $n \ne 7l$, $m \ne 9l$, $n, m, l \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Уравнение преобразуется к виду

$$64\cos^2\frac{x}{2}\cos^2 x\cos^2 2x = 1 .$$

После умножения левой и правой частей на $\sin^2\frac{x}{2}$ (при $\sin^2\frac{x}{2} \ne 0$) это уравнение приводится к виду

$$\sin^2 4x = \sin^2\frac{x}{2} , \text{ или } \cos 8x = \cos x .$$

5. 8. *Указание*. Точка M лежит на меньшей из дуг AB, так