них внутренним образом. В первом случае $OA = OB = \sqrt{6}+1$, а проекции $O'A$ и $O'B$ этих отрезков на плоскость γ равны (из теоремы Пифагора) $\sqrt{6+2\sqrt{6}}$. Из теоремы косинусов для треугольника $AO'B$ получаем

$$\cos\angle AO'B = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Во втором случае $OA = OB = \sqrt{6}-1$. Аналогично получаем $\cos\angle AO'B = -\sqrt{\frac{2}{3}}$.

В первом случае угол $AO'B$ острый, а во втором – тупой, при этом угол между прямыми $O'A$ и $O'B$ равен в обоих случаях $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$. Так как $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{16}{24}} > \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, получаем $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} < \arccos\frac{4}{5}$.

3. 300/13 км. *Указание.* Пусть $AB = x$, а v_1 и v_2 – скорости велосипедиста в начале и в конце пути от A до C. Участок AB велосипедист прошел за время $\frac{x}{v_1}$, BC – за время $\frac{75-x}{v_2}$. Поскольку $v_1 < v_2$, а по условию $\frac{x}{75-x} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 < 1$, то $x < \frac{75}{2}$, т.е. последние 18 км велосипедист ехал со скоростью v_2. Кроме того, $x \ge 2$.

Если $x \ge 18$, получаем уравнение $\frac{x}{75-x} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, а при $2 \le x < 18$ – уравнение $\frac{x}{75-x} = \frac{x^2}{(9+x)^2}$.

4. 3. Из параллельности отрезков BX и CD получаем равенства $\angle DCX = \angle BXC$ и $\angle CDX = \angle BXA$, а из параллельности отрезков CX и BA – равенства $\angle BXC = \angle XBA$ и $\angle BAX = \angle CXD$. Из того, что четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, следует, что $\angle BAX + \angle DCX + \angle BCX = \angle BAX + \angle DCB = 180^\circ = \angle BAX + \angle ABX + \angle AXB$, откуда (пользуясь равенством $\angle ABX = \angle DCX$) заключаем, что $\angle BCX = \angle AXB$. Полученные равенства показывают, что треугольники ABX, BXC и XCD попарно подобны друг другу. Тогда $AX : BC = BX : XC$ и $BC : DX = BX : XC$, откуда $AX : BC = BC : DX$, или $BC^2 = AX \cdot DC = 9$, и $BC = 3$.

5. $(2; +\infty)$. *Указание.* Данное уравнение при любом a имеет 2 корня x_1 и x_2. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg} x_1$, $\beta = \operatorname{arctg} x_2$. По условию задачи должно выполняться неравенство $\alpha+\beta > \frac{\pi}{4}$, что равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha+\beta > 0, \\ \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) < 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 + x_2 > 0, \\ \dfrac{1 - x_1x_2}{x_1+x_2} < 1. \end{cases}$$

Осталось заметить, что $x_1 + x_2 = 2a - 1$, а $x_1x_2 = a - 4$, и решить полученную систему относительно a.

6. $\frac{1}{4}\left(3+\sqrt{8}-\sqrt{11}\right)$. Нахождение минимального значения выражения $(x+y-z)^2$ сводится к нахождению минимального значения выражения $|2(x+y-z)| = |3(x+y)-(y+z)-(z+x)|$, которое совпадает с одним из чисел $|\pm a \pm b \pm c|$, где $a = |3(x+y)|$, $b = |y+z|$ и $c = |z+x|$. Из условия задачи получаем

$$\begin{cases} 3 \le a \le \sqrt{12}, \\ \sqrt{8} \le b \le 3, \\ \sqrt{10} \le c \le \sqrt{11}. \end{cases} \qquad (*)$$

Так как каждое из чисел a, b и c больше 2, но меньше 4, справедливы неравенства $a + b - c > 0$, $b + c - a > 0$ и $c + a - b > 0$. Поэтому числа $|\pm a \pm b \pm c|$ совпадают с одним из чисел $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$ и $a + b + c$. Следовательно, число $|\pm a \pm b \pm c|$ не меньше меньшего из минимальных значений выражений $a + b - c$, $b + c - a$ и $c + a - b$ при условиях $(*)$.

При выполнении условий $(*)$ минимальное значение выражения $a + b - c$ равно $3+\sqrt{8}-\sqrt{11}$, минимальное значение выражения $b + c - a$ равно $\sqrt{8}+\sqrt{10}-\sqrt{12}$, минимальное значение выражения $c + a - b$ равно $\sqrt{10}+3-3 = \sqrt{10}$. Заметив, что

$$3+\sqrt{8}-\sqrt{11} < \sqrt{8}+\sqrt{10}-\sqrt{12},$$

получаем, что число вида $|\pm a \pm b \pm c|$ не меньше чем $3+\sqrt{8}-\sqrt{11}$. Это значение достигается для решения системы

$$\begin{cases} 3x+3y = 3, \\ y+z = -\sqrt{8}, \\ z+x = \sqrt{11}. \end{cases}$$

Вариант 3

1. 7/2. *Указание.* Исходная система определяет прямоугольную трапецию с основаниями 5 и 2 и высотой 1.

2. $\left[-\frac{59}{2}; \frac{1}{2}\right] \cup \left(2; \frac{5}{2}\right)$.

3. 8. *Указание.* Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, найдите отношение радиусов r и r_1 окружностей, а затем и сами радиусы, после чего найдите AB и примените теорему синусов для отыскания радиуса описанной окружности.

4. 1; –7/23. *Указание.* Уравнение равносильно системе $\sin|x| \ge 0$, $5\sin x + 3\cos x + \sqrt{2} = 0$. Кроме того, $\operatorname{tg}|x| = \sin|x|/\cos x$. Поэтому $\operatorname{tg}|x|$ имеет тот же знак, что и $\cos x$. Возможные значения $\operatorname{tg} x$ найдите из уравнения $23\operatorname{tg}^2 x + 30\operatorname{tg} x + 7 = 0$, полученного возведением в квадрат уравнения $5\sin x + 3\cos x = -\sqrt{2}$ и делением на $\cos^2 x$ ($\cos x \ne 0$). После этого найдите и возможные значения $\operatorname{tg}|x|$.

5. $\left[-\sqrt{2}; -1\right) \cup \left(1; \sqrt{2}\right]$. *Указание.* Пусть $t = 3^{|ax|}$. Из неравенства системы следует, что $|ax| \le 2$, а из уравнения – что $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \ge 0$. Выполнив замену $y = x^2$, $b = a^2 \ge 0$, получим систему

$$\begin{cases} by \le 4, \\ b - y = \dfrac{n^2}{4}. \end{cases}$$

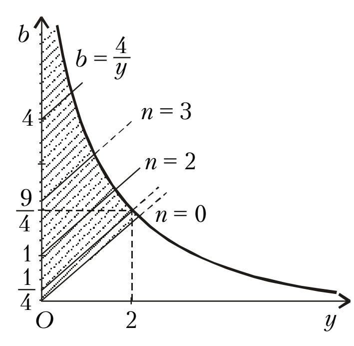

Рис. 9

Решения системы на плоскости Oyb (рис. 9) представляются семейством отрезков прямых $b = y + \frac{n^2}{4}$, n = 0, 1, 2, ..., находящихся в заштрихованной области между осью Ob и ветвью гиперболы $b = \frac{4}{y}$. Максимальное количество положительных решений y соответствует значениям b из промежутка $(1; 2]$.

6. 1. *Указание.* Две противоположные грани параллелепипеда – ромбы (рис.10). Пусть r – радиус вписанного шара, $h = 2r$ – его высота. Запишем объем параллелепипеда тремя способами:

$$V = a^2 h \sin\alpha = abh\sin\beta = abh\sin\gamma.$$