Материалы вступительных экзаменов 2002 года

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет, май)

1. Найдите дроби $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}$ и $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$, если числа α, β и γ выбраны так, что обе дроби положительны и одна из них втрое больше другой.

2. Решите неравенство

$$\sqrt[3]{2x-x\sqrt{x}-1}+\sqrt{x}+\sqrt[3]{1-2x}\le 0.$$

3. Точка M лежит на боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Известно, что $\angle BCD=\angle CBD=\angle ABM=\arccos\dfrac{5}{6}$ и $AB=9$. Найдите BM.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+1}x+\log_x(19-8a)=2$$

имеет по крайней мере два корня и при этом произведение всех его корней не меньше 0,01.

5. Сфера высекает на ребрах AB, CB, AS и CS треугольной пирамиды $SABC$ равные отрезки KL, NM, K_1L_1 и N_1M_1 соответственно (точки K и K_1 лежат ближе к A, чем L и L_1, а точки N и N_1 лежат ближе к C, чем M и M_1). Известно, что $MM_1=2KK_1$ и $2KN=3L_1M_1$, $\angle SBA=\angle SBC$ и $\angle KK_1N_1=90^\circ$. Найдите отношение объемов пирамид $SABC$ и M_1KLMN.

6. При каких x оба числа $\dfrac{x^2+4x-1}{7x^2-6x-5}$ и $\dfrac{1-x}{1+x}$ целые?

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\frac{2}{3}}\frac{x}{x+1}+\log_{\frac{1}{2}}\frac{x+1}{3x}\ge 2.$$

2. Три сферы, радиусы которых соответственно равны $\sqrt{6}$, 1 и 1, попарно касаются друг друга. Через прямую, содержащую центры A и B второй и третьей сфер, проведена плоскость γ так, что центр O первой сферы удален от этой плоскости на расстояние 1. Найдите угол между проекциями прямых OA и OB на плоскость γ и сравните его с $\arccos\dfrac{4}{5}$.

3. Из пункта A в пункт C выехал с постоянной скоростью велосипедист. За два километра до промежуточного пункта B он решил, что необходимо ехать быстрее, и, увеличив скорость в пункте B, продолжил движение с постоянной скоростью вплоть до пункта C. Приехав в C, велосипедист обнаружил, что время движения с каждой из скоростей было прямо пропорционально соответствующей скорости и что на первые 18 км пути он затратил времени в полтора раза больше, чем на последние 18 км. Найдите расстояние между пунктами A и B, если известно, что расстояние между A и C равно 75 км.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Точка X лежит на его стороне AD, причем $BX\parallel CD$ и $CX\parallel BA$. Найдите BC, если $AX=\dfrac{3}{2}$ и $DX=6$.

5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых сумма арктангенсов корней уравнения

$$x^2+(1-2a)x+a-4=0$$

больше $\dfrac{\pi}{4}$.

6. Найдите минимальное значение выражения $(x+y-z)^2$ при условии, что числа x, y и z удовлетворяют одновременно каждому из неравенств $1\le(x+y)^2\le\dfrac{4}{3}$, $8\le(y+z)^2\le 9$ и $10\le(z+x)^2\le 11$.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики, апрель)

1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости Oxy условиями

$$\begin{cases}3y+x\ge -5,\\ 6\sqrt{y+1}\le 6-4y,\\ x\le 0.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\left|6-\log_2\left(4x^2-20x+25\right)\right|\cdot\log_{5-2x}32\le 5.$$

3. Даны две окружности. Первая из них вписана в треугольник ABC, вторая касается стороны AC и продолжений сторон AB и BC. Известно, что эти окружности касаются друг друга, сумма кубов их радиусов равна 152, а угол BAC равен $\arccos\dfrac{1}{4}$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

4. Найдите $\operatorname{tg}|x|$, если известно, что

$$\left(5\sin x+3\cos x+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{11}-3\sqrt{\sin|x|}\right)=0.$$

5. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases}\sin\left(2\pi\sqrt{a^2-x^2}\right)=0,\\ 2\cdot 3^{|ax|}+3^{2-|ax|}\le 19\end{cases}$$

имеет наибольшее число решений?

6. Рассматриваются всевозможные параллелепипеды с четырьмя ребрами длины 4 и остальными ребрами длины 3, в которые можно вписать шар. Найдите максимальное значение радиуса такого шара.