Гладкая наклонная плоскость клина составляет с горизонтом угол α. *Определите величину ускорения клина* a_1. *Под каким углом* β *к горизонту движется шайба? Найдите силу давления* F *шайбы на клин. Ускорение свободного падения равно* g.

Обсудим два способа решения этой задачи.

Первый способ

Внешние силы, действующие на систему клин – шайба, направлены только по вертикали (рис.4). Следовательно, импульс системы в горизонтальном направлении сохраняется:

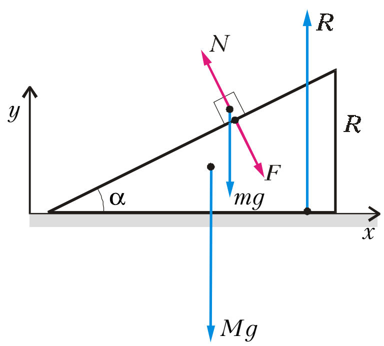

Рис. 4

$$Mv_{1x} + mv_{2x} = 0 .$$

Отсюда дифференцированием по времени получаем

$$Ma_{1x} + ma_{2x} = 0 .$$

Скорость шайбы $\vec{v}_2$ в ЛСО, скорость шайбы $\vec{u}$ относительно клина и скорость клина $\vec{v}_1$ в ЛСО связаны законом сложения скоростей (рис.5):

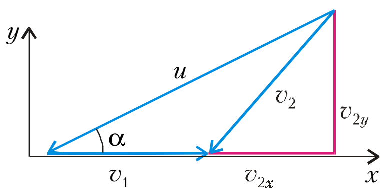

Рис. 5

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u} ,$$

так что

$$v_{2x} = v_{1x} - u\cos\alpha ,$$

$$v_{2y} = -u\sin\alpha .$$

Подставляя выражение для v_{2x} в выражение закона сохранения импульса, находим

$$u = v_{1x}\frac{m+M}{m\cos\alpha} .$$

С учетом этого соотношения получаем

$$v_{2y} = -v_{1x}\frac{m+M}{m}\operatorname{tg}\alpha ,$$

$$a_{2y} = -a_{1x}\frac{m+M}{m}\operatorname{tg}\alpha .$$

Далее обратимся к энергетическим соображениям. Поскольку силы трения отсутствуют, полная механическая энергия системы клин – шайба сохраняется:

$$\frac{Mv_{1x}^2}{2} + mgy + \frac{mv_{2x}^2}{2} + \frac{mv_{2y}^2}{2} = mgh ,$$

где буквой h обозначена y-координата шайбы при $t = 0$. Дифференцируя это равенство по времени, получаем

$$Mv_{1x}a_{1x} + mgv_{2y} + mv_{2x}a_{2x} + mv_{2y}a_{2y} = 0 .$$

Подстановка в это соотношение полученных выше выражений для $v_{2x}, v_{2y}, a_{2x}, a_{2y}$ приводит (после сокращения на v_{1x}) к ответу на вопрос об ускорении клина:

$$a_{1x} = \frac{1}{2}\frac{m\sin 2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}g .$$

Для определения угла β заметим, что в ЛСО шайба движется равноускоренно с нулевой начальной скоростью, так что ее перемещение за любой промежуток времени сонаправлено с вектором ускорения $\vec{a}_2$, тогда

$$\beta = \operatorname{arctg}\left|\frac{a_{2y}}{a_{2x}}\right| = \operatorname{arctg}\left(\frac{m+M}{M}\operatorname{tg}\alpha\right) .$$

Горизонтальная составляющая силы давления F шайбы на клин (см. рис.4) сообщает клину ускорение a_{1x}. По второму закону Ньютона,

$$Ma_{1x} = F\sin\alpha .$$

Отсюда находим силу давления:

$$F = \frac{Mm\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}g .$$

Второй способ

Для определения ускорения клина рассмотрим движение каждого из тел. Силы, приложенные к телам, указаны на рисунке 4. Запишем второй закон Ньютона для клина:

$$M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}$$

и для шайбы:

$$m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{N} .$$

Переходя к проекциям сил и ускорений на оси ЛСО с учетом равенства $\vec{F} = -\vec{N}$, получаем

$$Ma_{1x} = N\sin\alpha ,$$

$$ma_{2x} = -N\sin\alpha ,$$

$$ma_{2y} = mg - N\cos\alpha .$$

Скорость $\vec{v}_2$ шайбы в ЛСО, скорость $\vec{u}$ шайбы относительно клина и скорость $\vec{v}_1$ клина в ЛСО связаны законом сложения скоростей:

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u} .$$

Дифференцируя это равенство по времени, находим связь соответствующих ускорений:

$$\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{w} .$$

Из треугольника ускорений (см. треугольник скоростей на рисунке 5) следует

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_{2y}}{a_{2x} - a_{1x}} .$$

Подставляя в последнее равенство выражения для проекций ускорения шайбы a_{2x} и a_{2y}, после несложных преобразований получаем

$$a_{1x} = \frac{1}{2}\frac{m\sin 2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}g .$$

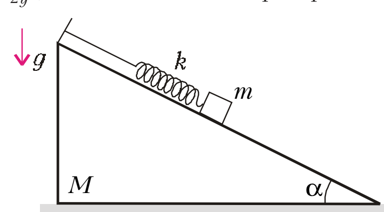

Рис. 6

Задача 4. *На гладкой горизонтальной плоскости лежит клин с углом при вершине* α. *На гладкой наклонной плоскости клина лежит брусок, связанный с клином пружиной жесткостью* k *(рис.6). Масса клина* M, *масса бруска* m. *Найдите период* T *малых колебаний системы.*

Предлагаем два способа решения задачи.

Первый способ

Внешние силы, действующие на систему клин – брусок, направлены только по вертикали (рис.7). Следовательно, импульс системы в горизонтальном направлении сохраняется:

$$Mv_1 + mv_{2x} = 0 .$$

Интегрируя это равенство по времени, получаем

$$Mx_1 + mx_2 = 0 .$$