найдем скорость центра масс системы шаров. Так как горизонтальные внешние силы на шары не действуют, импульс системы сохраняется:

$$mv = (m+6m)v_ц\,,$$

поэтому скорость центра масс системы в ЛСО постоянна и равна $v_ц = v/7$. В момент начала деформации пружины кинетическая энергия относительного движения шаров в Ц-системе равна

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{7m}{2}\left(\frac{v}{7}\right)^2 = \frac{3mv^2}{7}\,.$$

В процессе деформации кинетическая энергия относительного движения убывает до нуля, а энергия деформации растет и достигает наибольшего значения в момент остановки шаров в Ц-системе. Центр масс системы движется при этом с постоянной скоростью. По закону сохранения энергии,

$$\frac{3mv^2}{7} = \frac{k\Delta L_m^2}{2}\,,$$

откуда

$$\Delta L_m = v\sqrt{\frac{6m}{7k}}\,.$$

Для определения τ заметим, что деформация пружины изменяется по гармоническому закону, поэтому амплитуда скорости деформации и амплитуда относительного смещения связаны соотношением

$$v_m = v = \omega\Delta L_m\,.$$

Из двух последних равенств находим

$$\omega = \frac{v}{\Delta L_m} = \sqrt{\frac{7k}{6m}}.$$

Искомое время равно половине периода гармонических колебаний:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

Третий способ

В начальный момент времени скорости шаров в Ц-системе максимальны по величине и равны, соответственно, $u_{1m} = v - v/7 = 6v/7$ для налетающего в ЛСО шара и $u_{2m} = v/7$ для покоящегося шара. В Ц-системе (системе нулевого импульса) отношение скоростей 6 : 1 (обратное отношению масс) будет постоянным в процессе деформации пружины. Следовательно, неподвижная в Ц-системе точка пружины делит ее длину в том же отношении, т.е. 6 : 1. Жесткость пружины обратно пропорциональна ее длине. Отсюда находим жесткости двух пружин, разделенных неподвижной точкой:

$$k_1 = \frac{7}{6}k \text{ и } k_2 = 7k\,.$$

Тогда амплитуды смещений шаров будут равны

$$\Delta L_{1m} = \frac{u_{1m}}{\omega_1} = \frac{6v/7}{\sqrt{k_1/m}} = \frac{6}{7}v\sqrt{\frac{6m}{7k}}$$

и

$$\Delta L_{2m} = \frac{u_{2m}}{\omega_2} = \frac{v/7}{\sqrt{k_2/(6m)}} = \frac{1}{7}v\sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

Эти деформации достигаются одновременно, а максимальная деформация пружины равна их сумме:

$$\Delta L_m = \Delta L_{1m} + \Delta L_{2m} = v\sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

Время τ равно половине периода гармонических колебаний любого шара:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{\omega_2} = \pi\sqrt{\frac{6m}{7k}}\,.$$

Задача 2. *С плоскости, образующей с горизонтом угол α, скатывается без проскальзывания однородная тонкостенная труба массой M. Найдите ускорение $a_ц$ центра масс трубы и силу трения $F_{тр}$, пренебрегая влиянием воздуха. При каком соотношении между коэффициентом трения скольжения μ и углом α качение будет происходить без проскальзывания? Ускорение свободного падения равно g.*

Введем обозначения: $\vec{v}_ц$ – скорость центра масс трубы, ω – угловая скорость вращения трубы в Ц-системе. Труба катится без проскальзывания, поэтому

$$v_ц = \omega R\,,$$

где R – радиус трубы. Кинетическая энергия трубы равна

$$E_k = \frac{Mv_ц^2}{2} + \sum_i \frac{m_i(\omega R)^2}{2} = Mv_ц^2\,.$$

По закону сохранения энергии приращение кинетической энергии трубы к моменту времени t от начала движения равно убыли потенциальной энергии:

$$Mv_ц^2 = Mgx\sin\alpha\,,$$

где x – перемещение центра масс трубы к указанному моменту времени. Дифференцируя это соотношение по времени и замечая, что $v_ц = dx/dt$ и $a_ц = dv_ц/dt$, получим искомое ускорение:

$$a_ц = \frac{1}{2}g\sin\alpha\,.$$

Из уравнения движения центра масс трубы (рис.3)

$$Ma_ц = Mg\sin\alpha - F_{тр}$$

найдем величину силы трения сцепления:

$$F_{тр} = \frac{1}{2}Mg\sin\alpha\,.$$

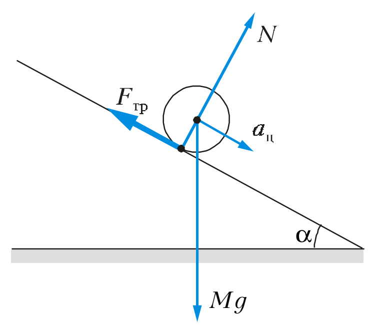

Рис. 3

Если считать, что при качении величина максимальной силы трения равна

$$F_{тр\,m} = \mu N = \mu Mg\cos\alpha\,,$$

то качение без проскальзывания будет происходить при условии

$$F_{тр} \le \mu Mg\cos\alpha\,,$$

т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha \le 2\mu\,.$$

Так как на скатывающееся тело действует сила трения, может возникнуть вопрос, почему в рассматриваемой задаче можно применять закон сохранения механической энергии. Ответ заключается в том, что при отсутствии скольжения сила трения приложена к тем точкам тела, которые лежат на мгновенной оси вращения, т.е. к точкам, скорость которых равна нулю, а потому приложенная к ним сила трения сцепления работы не совершает. Роль силы трения сцепления сводится к тому, чтобы привести тело во вращение и обеспечить чистое качение (без проскальзывания).

Задача 3. *По клину массой M, находящемуся на гладкой горизонтальной плоскости, скользит шайба массой m.*