Комбинированные задачи по механике

В.ПЛИС

Опыт вступительных экзаменов в ведущие физические вузы (МФТИ, МГУ, НГУ и др.) показывает, что задачи по механике, для решения которых следует привлекать не только законы сохранения или изменения физических величин, но и учитывать кинематические связи, выполнять переход из одной системы отсчета в другую, анализировать динамику системы тел наряду с динамикой того или иного тела в отдельности и т.д., вызывают затруднения у поступающих. Такие задачи иногда называют комбинированными. Зачастую они допускают несколько подходов к решению. Проиллюстрируем это на конкретных примерах достаточно сложных задач вступительных экзаменов по физике.

Задача 1. *Однородные шары радиусом R каждый находятся на гладкой горизонтальной спице (рис.1). К покоящемуся шару массой 6m прикреплена легкая пружина жесткостью k и длиной 6R. Шар массой m движется со скоростью v. Найдите максимальную деформацию ΔL_m пружины и время τ контакта шара массой m с пружиной.*

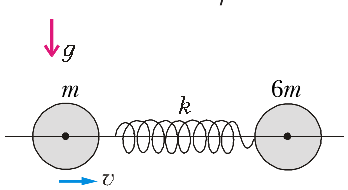

Рис. 1

Рассмотрим три способа решения этой задачи.

Первый способ

В лабораторной системе отсчета – ЛСО – уравнения движения шаров в проекции на горизонтальную ось x принимают вид (рис.2)

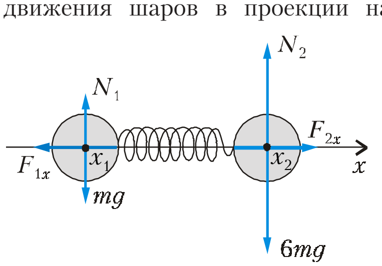

Рис. 2

$$ma_{1x} = F_{1x},$$

$$6ma_{2x} = F_{2x}.$$

Отсюда с учетом равенства $F_{1x} = -F_{2x}$ получим

$$a_{2x} - a_{1x} = F_{2x}\left(\frac{1}{6m} + \frac{1}{m}\right).$$

В момент времени t деформация пружины равна

$$L(0) - L(t) = 6R - (x_2 - x_1 - 2R) = -(x_2 - x_1) + 8R,$$

где L – длина пружины. Упругая сила связана с деформацией пружины законом Гука:

$$F_{2x} = k\left(-(x_2 - x_1) + 8R\right).$$

Тогда движение одного шара относительно другого описывается уравнением

$$(x_2 - x_1 - 8R)'' = a_{2x} - a_{1x} = -\frac{k}{M}(x_2 - x_1 - 8R),$$

где $M = \frac{m \cdot 6m}{m + 6m} = \frac{6}{7}m$ – так называемая приведенная масса системы шаров. Это уравнение описывает свободные гармонические колебания. Его общее решение имеет вид

$$x_2 - x_1 - 8R = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{7k}{6m}}$, а постоянные A и B можно найти из начальных условий

$$x_2(0) - x_1(0) - 8R = 0 = A,$$

$$v_{2x}(0) - v_{1x}(0) = -v = B\omega.$$

Окончательно получим

$$x_2(t) - x_1(t) - 8R = -v\sqrt{\frac{6m}{7k}}\sin\omega t.$$

Отсюда находим максимальную деформацию пружины:

$$\Delta L_m = v\sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

Шар массой m будет находиться в контакте с пружиной в течение половины периода гармонических колебаний:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{6m}{7k}}.$$

Второй способ

В ЛСО кинетическая энергия системы материальных точек равна

$$E_k = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Если ввести систему центра масс – Ц-систему, – то с учетом правила сложения скоростей

$$\vec{v}_i = \vec{v}_ц + \vec{u}_i,$$

где $\vec{v}_ц$ – скорость центра масс в ЛСО, $\vec{u}_i$ – скорость i-й точки в Ц-системе, выражение для энергии можно преобразовать:

$$E_k = \frac{\left(\sum_i m_i\right) v_ц^2}{2} + \sum_i \frac{m_i u_i^2}{2} + \left(\vec{v}_ц \cdot \sum_i m_i \vec{u}_i\right).$$

Последнее слагаемое в этом выражении равно нулю, так как в Ц-системе скорость центра масс равна нулю:

$$\vec{u}_ц = \frac{\sum_i m_i \vec{u}_i}{\sum_i m_i} = 0.$$

Полученное равенство

$$E_k = \frac{\left(\sum_i m_i\right) v_ц^2}{2} + \sum_i \frac{m_i u_i^2}{2}$$

словами формулируется так (теорема Кенига): кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме половины произведения массы системы на квадрат скорости ее центра масс и кинетической энергии относительного движения в Ц-системе.

Чтобы применить эту формулу для решения нашей задачи,