казано на рисунке 4. На главной оптической оси получившейся системы на расстоянии 1 м от нее помещают точечный источник света, а с другой стороны системы – экран. Как нужно расположить экран, чтобы освещенное пятно на нем имело минимальный диаметр? Чему он равен?

А.Очков

Решения задач M1826—M1830, Ф1838—Ф1847

M1826. *Про положительные числа a, b, c известно, что $1/a+1/b+1/c \ge a+b+c$. Докажите, что $a+b+c \ge 3abc$.*

Умножая неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge a+b+c$ на общий знаменатель, получаем равносильное неравенство $bc+ac+ab \ge (a+b+c)abc$.

Теперь докажем вспомогательное неравенство $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge 2(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \ge 3(ab+bc+ca) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca).$$

Отсюда легко получаем требуемое неравенство:

$$(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca) \ge 3(a+b+c)abc,$$
$$a+b+c \ge 3abc.$$

С.Злобин

M1827. *Пусть Q – произвольная точка окружности с диаметром AB, QH – перпендикуляр, опущенный на AB (рис.1). Точки C и M – это точки пересечения окружности с центром Q и радиусом QH с первой окружностью. Докажите, что прямая CM делит радиус QH пополам.*

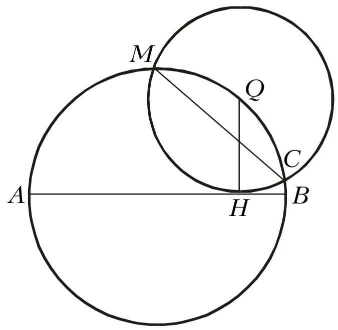

Рис.1

Проведем прямые CH и MH до пересечения с окружностью в точках F и R соответственно (рис.2). Тогда $\angle MCF = \frac{1}{2} \cup MF = \angle MRF$ и $\angle MCF = \angle MHA$, так как AH – касательная; значит, $\angle RHB = \angle HRF$, или $AB \parallel FR$. В ΔHRW угол $\angle HWR = \frac{1}{2} \cup QR = \angle QMH$, но $\angle QMH = \angle QHM$ ($MQ = QH$), т.е. ΔHRW – равнобедренный и RI – высота в ΔHRW ($I = HW \cap RF$). Получим, что $HI = IW$, $QH = HW$. Пользуясь результатом задачи «Проблема бабочки», видим, что $IH = HL = IW = LQ$, что и требовалось доказать. (О «бабочках» см., например, книгу: Г.С.Коксетер, С.Л.Грейтцер «Новые встречи с геометрией».)

В.Дубов

M1828. *А, Б, В, Г и Д собирают почтовые марки. У А – более 3/4 марок Б, у Б – более 3/4 марок В, у В – более 3/4 марок Г, у Г – более 3/4 марок Д, у Д – более 3/4 марок А. Докажите, что есть марка, которая имеется у каждого филателиста.*

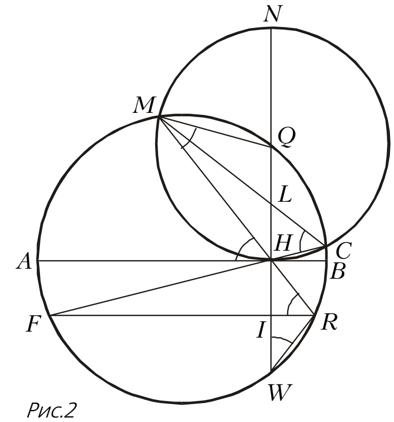

Рис.2

Сначала переведем условие задачи на язык конечных множеств. Имеется пять конечных множеств $А$, $Б$, $В$, $Г$ и $Д$; обозначим $А \cap Б = Б_1$, $Б \cap В = В_1$, $В \cap Г = Г_1$, $Г \cap Д = Д_1$ и $Д \cap А = А_1$. Также будем обозначать через $|X|$ количество точек (мощность) множества X. Известно, что $|Б_1| > \frac{3}{4}|Б|$, $|В_1| > \frac{3}{4}|В|$, $|Г_1| > \frac{3}{4}|Г|$, $|Д_1| > \frac{3}{4}|Д|$ и $|А_1| > \frac{3}{4}|А|$. Нужно доказать, что пересечение пяти множеств $А \cap Б \cap В \cap Г \cap Д$ не пусто.

Докажем это методом улитки, ползущей по склону Фудзи. Полагаем для определенности, что множество $А$ имеет максимальную мощность. Схема доказательства будет такой. По условию множество $Д$ «толсто» пересекается с множеством $А$. Затем мы обнаруживаем, что три множества $Г$, $Д$ и $А$ имеют тоже достаточно «толстое» пересечение. Далее видим, что четыре множества $В$, $Г$, $Д$ и $А$ имеют пересечение еще достаточно «толстое» для того, чтобы оно пересекалось непременно и с множеством $Б$.

Но все по порядку. В силу того, что $|А|$ максимально, а множества $Д_1$ и $А_1$ содержатся в $Д$, нетрудно убедиться в справедливости неравенства для множества $F = Д_1 \cap А_1$: $|F| > \frac{1}{2}|А|$. При этом $F \subset Г \cap Д \cap А$. Множества F и $Г_1$ содержатся в $Г$, а $|Г_1| > \frac{3}{4}|Г|$, значит, множество $G = F \cap Г_1$ таково, что $|G| > \frac{1}{4}|А|$. Далее, множества G и $Б_1$ содержатся в $В$, а $|В_1| > \frac{3}{4}|В|$. Поэтому мы заключаем, что множество $H = G \cap В_1$ не пусто. Но H содержится в множестве $Б$, а также, в силу процедуры, во всех других множествах $В$, $Г$, $Д$ и $А$. Иначе говоря, непустое множество $H \subset А \cap Б \cap В \cap Г \cap Д$, т.е. утверждение доказано: есть такая марка! Непривычность таких выкладок для читателя связана с тем, что они теоретико-множественные и арифметические одновременно. Зато теперь вы можете обобщить задачу на n филателистов и доказать ее по той же схеме. При этом роль числа $\frac{3}{4}$ будет выполнять число $\frac{n-2}{n-1}$.

В.Произволов

M1829. *Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в черный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества черных точек были подобны*