Великомученик Петя

И.АКУЛИЧ

Рассмотрим положительные числа a и b. Как известно, их среднее арифметическое — это $\frac{a+b}{2}$, а среднее геометрическое — число $\sqrt{ab}$. Чуть меньшей известностью пользуется среднее гармоническое: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$. Очевидно, что

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = ab,$$

т.е. произведение среднего арифметического и среднего гармонического равно произведению самих чисел a и b.

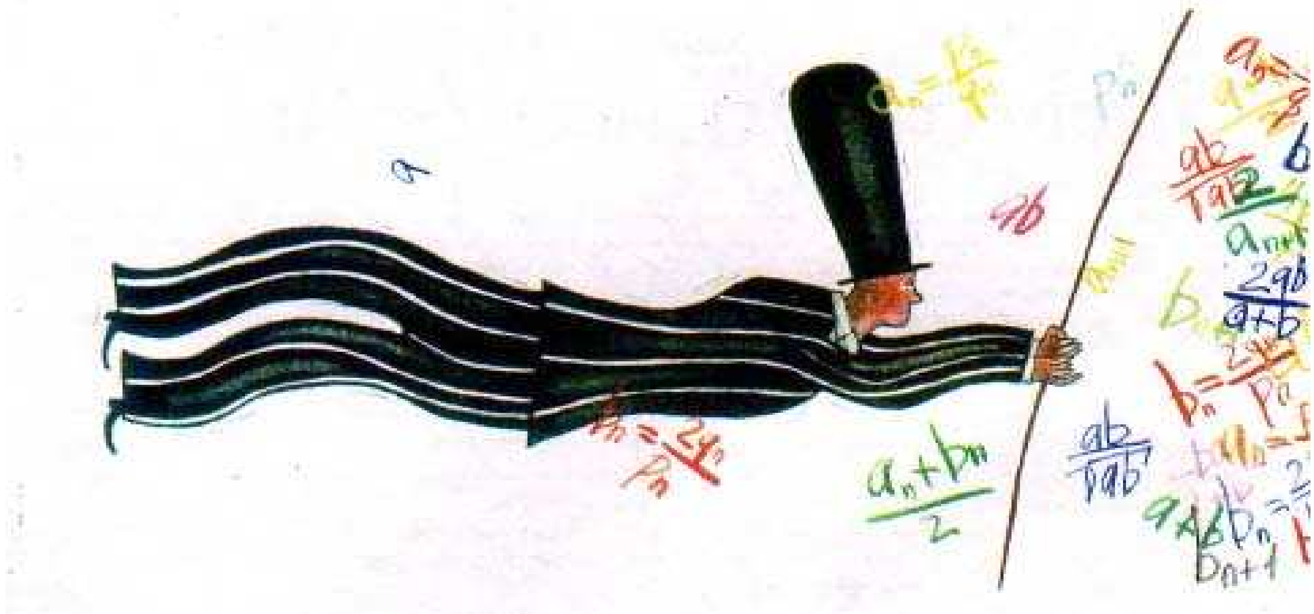
В 1999 году А.Канель понял, что из этого можно «слепить» неплохую задачу для олимпиады, примерно такую:

Пусть $a_0 = 1$, $b_0 = 2$ и для любого натурального n числа a_n и b_n — соответственно, среднее арифметическое и среднее гармоническое чисел a_{n-1} и b_{n-1}. Найдите произведение $a_{1999}b_{1999}$.

Решение состоит в том, что произведение a_nb_n одно и то же для всех n, поэтому $a_{1999}b_{1999} = a_0b_0 = 2$.

Но автор, видимо, решил, что условие выглядит скучновато, и «оживил» его:

На доске в лаборатории написаны два числа. Каждый день старший научный сотрудник Петя стирает с доски оба числа и пишет вместо них их среднее арифмети-



ческое и среднее гармоническое. Утром первого дня на доске были написаны числа 1 и 2. Найдите произведение чисел, которые Петя напишет вечером 1999-го дня.

В таком виде задачу предложили девятиклассникам на LXII Московской олимпиаде. Вроде бы задача отличается от первоначальной лишь появлением лишней сюжетной линии, а по сути эквивалентна первоначальной. Но давайте проследим за действиями старшего научного сотрудника. В первый день он напишет на доске числа $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$ и $\frac{2\cdot 1\cdot 2}{1+2}=\frac{4}{3}$. Во второй день — числа $\frac{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}{2}=\frac{17}{12}$ и $\frac{2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}}{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}}=\frac{24}{17}$. Впрочем, что это мы среднее гармоническое вычисляем? Вы же помните, что произведение среднего арифметического и среднего гармонического равно 2. Так что дальше можно вычислять только среднее арифметическое. На третий день (проверьте, если сомневаетесь!) на доске окажутся числа $\frac{577}{408}$ и $\frac{816}{577}$, на четвертый — $\frac{665857}{470832}$ и $\frac{941664}{665857}$, на пятый — $\frac{886731088897}{627013566048}$ и $\frac{1254027132096}{886731088897}$, на шестой —

$$\frac{1572584048032918633353217}{1111984844349868137938112}$$

и

$$\frac{2223969688699736275876224}{1572584048032918633353217}.$$

Дальше цифр будет еще больше ...

Петя, конечно, может воспользоваться компьютером — старший научный сотрудник все-таки. Но интересно, сможет ли Петя выписывать числа, т.е. хватит ли ему места на доске? И всегда ли сможет компьютер подсчитать эти числа? Уж больно быстро они возрастают...

Читатель, наверное, уже предчувствует ответ. Но убедиться не мешает. Запишем число a_n в виде несократимой дроби:

$$a_n=\frac{p_n}{q_n}.$$

Тогда

$$b_n=\frac{2q_n}{p_n},$$

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{\frac{p_n}{q_n}+\frac{2q_n}{p_n}}{2}=\frac{p_n^2+2q_n^2}{2p_nq_n},$$

$$b_{n+1}=\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{4p_nq_n}{p_n^2+2q_n^2}.$$

Таким образом, $p_{n+1}=p_n^2+2q_n^2>p_n^2$. Оценка, заметьте, довольно грубая (по индукции можно доказать[1], что $p_n^2-2q_n^2=1$, так что на самом деле $p_{n+1}=2p_n^2-1$). Мы уже знаем, что $p_6>10^{24}$. Значит, $p_7>10^{48}$, $p_8>10^{96}$, ..., $p_{1999}>10^{24\cdot 2^{1993}}$. Поскольку $2^{10}=1024>1000$, то

$$24\cdot 2^{1993}=24\cdot 2^3\cdot 2^{10\cdot 199}>192\cdot 1000^{199}>10^{599}.$$

Значит, числитель дроби, которую Петя должен написать на доске на 1999-й день, будет содержать более 10^{599} цифр. Сказать, что это число очень большое, — значит ничего не сказать. Оно несусветно большое. Даже если Петя будет выписывать миллиард цифр в секунду, то ему потребуется более 10^{590} секунд. Поскольку

$$60\cdot 60\cdot 24\cdot 366=31622400<40000000,$$

то Пете понадобится более 10^{582} лет для того, чтобы выписать один только этот числитель...

---

[1] Об этом и многом другом можно прочитать в статье В.Сендерова и А.Спивака «Уравнения Пелля» в «Кванте» №3.