так что дробь $17/12$ приближает число $\sqrt{2}$ с точностью $0{,}0025$, а дробь $41/29$ – с точностью $0{,}00043$.

Упражнения

61. Существует ли дробь, которая приближает число $\sqrt{2}$ с точностью до одной миллионной, а ее знаменатель – трехзначное число?

62. Докажите следующие утверждения:

а) Если m, n – натуральные числа и $\sqrt{2} > \frac{m}{n}$, то $\sqrt{2} - \frac{m}{n} > \frac{1}{2n^2\sqrt{2}}$.

б) Если m, n – натуральные числа, то $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| > \frac{1}{4n^2}$.

в) Существует такая бесконечная ограниченная последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$, что для любых различных m и n выполнено неравенство $\left|x_n - x_m\right| \geq \frac{1}{|n-m|}$. (Этот пункт решали в 1978 году школьники двух самых старших классов на Всесоюзной математической олимпиаде.)

г) Если $\varepsilon > 0$, то неравенство $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{\left(\varepsilon + 2\sqrt{2}\right)n^2}$ имеет лишь конечное число решений в натуральных числах m, n.

63. Для любого положительного числа a рассмотрим последовательность, первый член которой $a_1 = a$, а каждый следующий вычисляется по формуле $a_{n+1} = \left(2 + a_n\right)/\left(1 + a_n\right)$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2}$.

Цепная дробь числа $\sqrt{3}$

Поступим с $\sqrt{3}$ так же, как мы поступали с $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{3} = 1 + \left(\sqrt{3} - 1\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{\left(\sqrt{3}+1\right)/2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \left(\sqrt{3}-1\right)}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\left(\sqrt{3}+1\right)/2}}} = \ldots$$

$$\ldots = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}}}.$$

Выпишем несколько первых подходящих дробей:

$$\frac{1}{1};\ 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1};\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}} = \frac{5}{3};$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{7}{4};\ 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} = \frac{19}{11};$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}}} = \frac{26}{15}.$$

Заметим:

$$1^2 - 3\cdot 1 = -2, \quad 2^2 - 3\cdot 1^2 = 1,$$
$$5^2 - 3\cdot 3^2 = -2, \quad 7^2 - 3\cdot 4^2 = 1,$$
$$19^2 - 3\cdot 11^2 = -2, \quad 26^2 - 3\cdot 15^2 = 1,$$

так что половина дробей «лишние» – они дают решения не уравнения $x^2 - 3y^2 = 1$, а уравнения $x^2 - 3y^2 = -2$. (Как вы помните, подходящие дроби числа $\sqrt{2}$ обладают аналогичным свойством.)

Упражнение 64. Если начать с дроби $1/1$ или $2/1$ и применять правило $\frac{x}{y} \to \frac{x+3y}{x+2y}$, то все дроби, которые будут при этом получены, являются подходящими дробями числа $\sqrt{3}$. Докажите это.

В следующей части статьи мы докажем многие удивительные свойства цепных дробей. В частности, если x/y – подходящая дробь числа ξ, то $\left|\xi - \frac{x}{y}\right| < \frac{1}{y^2}$. Кроме того, если $x^2 - dy^2 = 1$ и x, y – натуральные числа, то x/y – подходящая дробь числа $\sqrt{d}$, так что для поиска решения $(x;\ y)$ уравнения Пелля следует перебирать лишь подходящие дроби числа $\sqrt{d}$. А вот обратное утверждение, как видно на примерах $d = 2$ и $d = 3$, ложно: не каждая подходящая дробь соответствует решению уравнения Пелля.

Вряд ли вам удастся самостоятельно создать теорию цепных дробей. Но поэкспериментировать, разлагая разные числа (и рациональные, и иррациональные) в цепные дроби и вычисляя подходящие дроби, очень полезно. Хотя бы одну-две интересные закономерности обязательно обнаружите! Например, постарайтесь выяснить, как связаны между собой английский метод решения уравнения $x^2 - dy^2 = 1$ и цепная дробь числа $\sqrt{d}$.

(Продолжение следует)