Поскольку

$$aA - bBd \equiv a^2 - b^2 d = c \equiv 0 \pmod{|c|}$$

и

$$aB - Ab \equiv ab - ab = 0 \pmod{|c|},$$

то числа $x = (aA - bBd)/c$ и $y = (aB - Ab)/c$ целые. Так как

$$x^2 - dy^2 = \left(x - y\sqrt{d}\right)\left(x + y\sqrt{d}\right) =$$

$$= \frac{A - B\sqrt{d}}{a - b\sqrt{d}} \cdot \frac{A + B\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} = \frac{A^2 - dB^2}{a^2 - db^2} = \frac{c}{c} = 1$$

и $y \neq 0$, то $(x; y)$ – искомое нетривиальное решение уравнения Пелля!

Упражнения

59. Докажите, что $y \neq 0$.

60. Докажите, что для любого натурального числа n существуют такие натуральные x и y, что $x^2 - 3y^2 = 1$ и y делится на 3^n, однако степенью тройки y быть не может (за тривиальным исключением $y = 1$).

Цепные дроби

Цепная дробь числа $\sqrt{2}$

Очевидно, $\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right) = 2 - 1 = 1$ и, следовательно,

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Воспользуемся этой формулой много-премного раз:

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + \left(\sqrt{2} - 1\right)} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}} =$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}}} = \ldots = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}.$$

Мы получили разложение числа $\sqrt{2}$ в цепную дробь.

Впрочем, что это значит – разложить данное число α в цепную дробь? Это значит, прежде всего, выделить его целую часть, т.е. представить его в виде

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\},$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа α, т.е. такое целое число, что $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$. Обозначаем: $a_0 = [\alpha]$. Если α – целое число, то $\{\alpha\} = 0$, и процесс разложения в цепную дробь на этом обрывается. Если же $\{\alpha\} > 0$, то число α можно представить в виде $\alpha = a_0 + \frac{1}{\beta}$, где $\beta > 1$. Записав $\beta = [\beta] + \{\beta\}$, находим следующее неполное частное: $a_1 = [\beta]$. Если $\{\beta\} = 0$, то разложение получено. Если же $\{\beta\} > 0$, то

$$\beta = a_1 + \frac{1}{\gamma},$$

где $\gamma > 1$. И так далее, и так далее, пока очередное число не окажется целым или – до бесконечности (точнее, пока не наступит конец света).

Если исходное число α иррационально, то и β, и γ, и все возникающие далее такие числа иррациональны, так что процесс разложения в цепную дробь никогда не остановится и даст бесконечную последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ элементов – так называемых *неполных частных*.

Обрывая цепную дробь числа $\sqrt{2}$ в разных местах, получаем *подходящие дроби*:

$$\frac{1}{1};\quad 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};\quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5};\quad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12};\ldots$$

Наши старые знакомые!

Может быть, это случайное совпадение? Нет, если n-этажная дробь (т.е. дробь, в которой n двоек) приводится к несократимому виду x/y, то $(n+1)$-этажная дробь равна

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{x}{y}} = 1 + \frac{y}{x + y} = \frac{x + 2y}{x + y}.$$

Очевидно, НОД$(x + 2y,\ x + y)$ = НОД$(y,\ x + y)$ = = НОД$(x,\ y)$, так что дробь $(x + 2y)/(x + y)$ тоже несократима. Поэтому увеличение количества дробных черт на единицу – это переход от несократимой дроби x/y к несократимой дроби $(x + 2y)/(x + y)$. А это и есть формулы первой части статьи!

Подходящие дроби $1/1$, $3/2$, $7/5$, $17/12$,... замечательны тем, что дают (попеременно, слева и справа) весьма точные приближения числа $\sqrt{2}$. А именно,

$$\frac{1}{1} < \frac{7}{5} < \frac{41}{29} < \frac{239}{169} < \ldots < \sqrt{2} < \ldots < \frac{99}{70} < \frac{17}{12} < \frac{3}{2}.$$

Оценить погрешность приближения несложно:

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(x - y\sqrt{2}\right)\left(x + y\sqrt{2}\right)}{y\left(x + y\sqrt{2}\right)}\right| = \frac{\left|x^2 - 2y^2\right|}{y^2\left(\frac{x}{y} + \sqrt{2}\right)} = \frac{1}{y^2\left(\frac{x}{y} + \sqrt{2}\right)}.$$

Например,

$$0 < \frac{17}{12} - \sqrt{2} = \frac{1}{12^2\left(\sqrt{2} + \frac{17}{12}\right)} < \frac{1}{12^2 \cdot 2\sqrt{2}} < 0{,}0025,$$

$$0 < \sqrt{2} - \frac{41}{29} = \frac{1}{29^2\left(\sqrt{2} + \frac{41}{29}\right)} < \frac{1}{29^2 \cdot 2 \cdot \frac{41}{29}} < 0{,}00043,$$