Упражнения

55. Выполнив еще пять шагов циклического метода, найдите решение $48842^2 - 67 \cdot 5967^2 = 1$.

56. а) Выполните вычисления для $d = 67$, применяя английский метод. б) Сравнив английский и циклический методы для $d = 67$ и для нескольких других значений d, сформулируйте гипотезу о взаимосвязи этих двух методов.

Если вы решили эти два упражнения, то убедились, что индийский и английский методы позволяют найти решение для $d = 67$. Однако ни для английского, ни для индийского метода нет никаких очевидных причин, по которым равенство с правой частью 1 должно обязательно получиться в общем случае. Есть и много других вопросов. Например, если эти методы дадут нам какое-то решение уравнения Пелля, можно ли утверждать, что это решение – наименьшее из возможных?

Я уверен, что попытка самостоятельно разобраться в этих вопросах будет очень полезной. Любитель компьютеров может начать с написания английской и индийской программ, которые вычислят приведенную выше таблицу. А вот для обоснования циклического или английского метода (а лучше бы обоих!) вам придется создать чуть ли не целую теорию! Но даже если у вас ничего не получится (а у большинства, вы уж не обижайтесь, действительно ничего не получится, поскольку задача очень сложна даже для тех, кто успешно справляется с «Задачником «Кванта»), это будет очень полезно.

Доказательство существования

Приближения иррациональных чисел рациональными

Теорему 10 можно доказать, рассматривая приближения числа $\sqrt{d}$ рациональными числами. Для этого сначала сформулирую и докажу следующую лемму.

Лемма. *Для любого вещественного числа* ξ *и любого натурального числа* N *существуют такие целое число* a *и натуральное число* b, *что* $b \le N$ *и*

$$|b\xi - a| \le \frac{1}{N+1}.$$

Доказательство. Рассмотрим числа 0 и 1, а также дробные части чисел ξ, 2ξ, …, $N\xi$. Если бы все расстояния между этими $(N+2)$-мя числами были больше $1/(N+1)$, то получилось бы противоречие. Значит, какое-то из расстояний не превосходит $1/(N+1)$. Если

$$\left|\{b_2\xi\} - \{b_1\xi\}\right| \le \frac{1}{N+1},$$

где $1 \le b_1 < b_2 \le N$, то

$$\left|\left(b_2\xi - [b_2\xi]\right) - \left(b_1\xi - [b_1\xi]\right)\right| \le \frac{1}{N+1},$$

так что достаточно взять $b = b_2 - b_1$ и $a = [b_2\xi] - [b_1\xi]$. Остальные два случая столь же очевидны: если

$$\{b\xi\} - 0 \le \frac{1}{N+1},$$

то годится $a = [b\xi]$; если же

$$1 - \{b\xi\} \le \frac{1}{N+1},$$

то можно взять $a = [b\xi] + 1$. Лемма доказана.

Упражнения

57. Для любых чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и любого натурального числа N существуют такие целые числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$ и a, хотя бы одно из которых отлично от нуля, что абсолютные величины чисел $b_1, b_2, \ldots, b_k$ не превосходят N и

$$|b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + \ldots + b_k\xi_k - a| \le \frac{1}{N^k + 1}.$$

Докажите это.

58. Для любых чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и любого натурального числа N существует такое натуральное число b, что $b \le N^k$ и дробные части чисел $b\xi_1, b\xi_2, \ldots, b\xi_k$ не превосходят $1/N$. Докажите это.

Доказательство теоремы 10

Положим $\xi = \sqrt{d}$. Для любого натурального $n > 1$ в силу леммы существуют такие натуральные числа a_n и b_n, что $b_n < n$ и

$$\left|a_n - b_n\sqrt{d}\right| \le \frac{1}{n}.$$

Очевидно,

$$\left|a_n^2 - db_n^2\right| = \left|a_n - b_n\sqrt{d}\right| \cdot \left|a_n + b_n\sqrt{d}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{n}\left|a_n - b_n\sqrt{d} + 2b_n\sqrt{d}\right| \le \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} + 2n\sqrt{d}\right) < 1 + 2\sqrt{d}.$$

Итак, величина $a_n^2 - db_n^2$ может принимать лишь конечное число значений. Но n можно брать сколь угодно большим! И при этом в силу неравенства $\left|a_n - b_n\sqrt{d}\right| \le \frac{1}{n}$ при $n \to \infty$ имеем $b_n \to \infty$. Значит, хотя бы для одного целого числа c, по модулю меньшего $1 + 2\sqrt{d}$, существует бесконечно много пар натуральных чисел $(a_n; b_n)$, для которых

$$a_n^2 - db_n^2 = c.$$

Зафиксируем одно из таких чисел c. Рассмотрим остатки от деления чисел a_n и b_n на $|c|$. Поскольку количество остатков конечно, то существуют такие две[5] разные пары натуральных чисел $(a; b)$ и $(A; B)$, что

$$a^2 - db^2 = c = A^2 - dB^2$$

и

$$a \equiv A \pmod{|c|},$$
$$b \equiv B \pmod{|c|}.$$

(Продумайте это!) Рассмотрим частное

$$\frac{A + B\sqrt{d}}{a + b\sqrt{d}} = \frac{\left(a - b\sqrt{d}\right)\left(A + B\sqrt{d}\right)}{a^2 - db^2} =$$

$$= \frac{aA - bBd + (aB - Ab)\sqrt{d}}{c}.$$

[5] *На самом деле даже не две, а бесконечно много, но нам это не нужно.*