замечаний, которые, быть может, послужили зародышем идеи, развитой впоследствии Валлисом. Возможно, Валлису было важно добиться расположения Броункера и его покровительства, поэтому он и назвал этот метод методом Броункера (ибо Броункер в 1662–1677 годах был президентом основанного в 1660 году Лондонского Королевского общества). Впрочем, некоторые историки считают самого Броункера весьма способным математиком и утверждают, что по своим личным качествам Валлис скорее мог приписать себе чужие заслуги, чем отказаться от своих.

Строго говоря, англичане не решили задачу Ферма, которая заключалась в том, что при данном (не являющемся квадратом) натуральном d существует бесконечно много натуральных x таких, что dx^2+1 является квадратом. Они не доказали, что процедура всегда завершится, и, кажется, даже не понимали, что это нужно доказывать.[3]

Ферма написал письмо, в котором признал, что англичанам удалось решить его задачу, и не проявил ни малейшей неудовлетворенности их методом. Однако главным для Ферма в этом письме было убедить англичан, что перед ними была поставлена достойная задача, так что он мог сознательно закрыть глаза на недостатки.

Несколько лет спустя, подводя в письме к Каркави итоги некоторых своих открытий, Ферма указал, что англичане получили решение его задачи только в отдельных частных случаях и им не удалось дать общее доказательство. Очевидная интерпретация этого замечания заключается в том, что Ферма заметил отсутствие доказательства того, что процесс всегда приводит к решению; с другой стороны, в нем можно увидеть и менее глубокую критику того, что процесс был описан в недостаточно общих терминах. Ферма утверждает, что он мог бы дать доказательство, «надлежащим образом» применив метод бесконечного спуска. Эти слова, разумеется, нельзя считать достаточным свидетельством в пользу того, что он умел решать свою задачу.

Индийский и английский методы

Легенды гласят, что за несколько веков до нашей эры в Индии было известно равенство $2\cdot 408^2+1=577^2$. Равенство $92\cdot 120^2+1=1151^2$ вместе с изощренной техникой его вывода было получено Брахмагуптой (родился в 598 году). Общий способ решения уравнения Пелля[4] дал Бхаскара Акхария. Этот метод называют циклическим или индийским.

Познакомимся с ним на примере $d = 67$. Наша цель – найти такие натуральные x и y, чтобы разность y^2-67x^2 равнялась 1. В качестве первого приближения рассмотрим равенство

$$8^2-67\cdot 1^2=-3\,.$$

Вспомнив формулу

$$\left(a^2-67b^2\right)\left(c^2-67d^2\right)=(ac+67bd)^2-67\,(bc+ad)^2$$

и применив ее к равенствам $8^2-67\cdot 1^2=-3$ и $r^2-67\cdot 1^2=s$, где r (а тем самым и s) будет определено позже, получим

$$(8r+67)^2-67\,(r+8)^2=-3s\,.$$

Пытаясь сделать правую часть (по модулю) как можно меньшей только за счет выбора наименьшего по модулю значения s, мы выбрали бы $r = 8$, при котором $s = -3$, и получили бы равенство

$$131^2-67\cdot 16^2=9\,,$$

с которым непонятно что делать дальше.

Идея циклического метода – выбор такого r, чтобы $r + 8$ делилось на 3 и s при этом было как можно меньше по модулю. (Когда это сделано, обе части уравнения разделятся нацело на 3^2.)

Идея английского метода – выбор такого как можно большего r, что $r^2 < d$ и $r + 8$ делится на 3.

Как видите, методы очень похожи. Оба можно применять для поиска решений при данном d, не зная заранее, что это приведет к успеху. (Между прочим, априори нет никакой уверенности в том, что в общем случае в английском методе после каждого шага r будет существовать. Это – одна из теорем, которые надо доказывать, обосновывая английский метод.)

Проведем подробно вычисления для циклического метода. Чтобы $r + 8$ делилось на 3, число r должно равняться одному из чисел бесконечной в обе стороны арифметической прогрессии …, –2, 1, 4, 7, 10, 13, 16, … Выбор $r = 7$ дает наименьшее по модулю значение $s = -18$. Этим r и s соответствует равенство

$$123^2-67\cdot 15^2=54\,,$$

которое после сокращения на 9 превращается в

$$41^2-67\cdot 5^2=6.$$

Теперь – следующий шаг циклического метода:

$$(41r+67\cdot 5)^2-67\,(5r+41)^2=6s.$$

Число $5r + 41$ делится на 6 при $r = \ldots, -7, -1, 5, 11, 17, 23, \ldots$ Выбор $r = 5$ дает наименьшее по модулю $s = -42$, и мы получаем равенство

$$540^2-67\cdot 66^2=6\cdot(-42),$$

которое после сокращения на 6^2 превращается в

$$90^2-67\cdot 11^2=-7.$$

Дальше надо выполнить следующий шаг циклического метода, потом еще один, и так до тех пор, пока не получим равенство, в правой части которого будет 1.

---

[3] *Даже Эйлеру не удалось доказать, что английский метод всегда приводит к успеху. Удалось это Лагранжу через 110 лет после того, как Валлис отослал ответ на вызов Ферма.*

[4] *Термин «уравнение Пелля» возник в результате ошибки Леонарда Эйлера. Почему-то – возможно, по причине смутных воспоминаний, оставшихся от чтения «Алгебры» Валлиса,– у Эйлера создалось впечатление, будто Валлис приписывает метод решения этой задачи не Броункеру, а Пеллю – современнику Валлиса, который много раз упомянут в его работах, но не имел никакого отношения к уравнению $x^2-dy^2=1$. Эйлер впервые сделал эту ошибку в 1730 году, когда ему было 23 года, но она попала и в окончательное издание «Введения в алгебру» (примерно 1770 г.). Эйлер был самым популярным математическим автором своего времени, и ошибка вошла в историю…*