Уравнения Пелля

А. СПИВАК

В предыдущих частях статьи доказано много разных интересных теорем. Не доказана только одна, самая трудная – десятая. Эта теорема утверждает, что любое уравнение $x^2 - dy^2 = 1$, где d – натуральное число, не являющееся точным квадратом, имеет хотя бы одно решение в натуральных числах.

Я изложу четыре доказательства. Первый способ использует принцип Дирихле и приближения иррациональных чисел рациональными. Этот способ короткий и прозрачный, но у него есть принципиальный недостаток: он не дает приемлемого для практики метода нахождения решения. Похожие друг на друга другие два способа – английский и индийский методы – свободны от этого недостатка, являясь алгоритмами поиска решения. К сожалению, доказательство того, что эти алгоритмы рано или поздно останавливаются и приводят именно к наименьшему решению, требует значительных усилий.

Мне больше всего нравится четвертый способ, использующий цепные дроби. Их роль в теории уравнений Пелля не менее значительна, чем роль иррациональных чисел, о которой было рассказано в первой и второй частях статьи. Да и сами по себе цепные дроби чрезвычайно интересны.

Но прежде всего расскажу одну историю. [1]

Продолжение. Начало см. в «Кванте» №3, 4.

Вызов Ферма

Начало есть более чем половина всего.
Аристотель

«Сейчас едва ли найдется кто-нибудь, кто предлагает арифметические вопросы, и кто-нибудь, кто их понимает. Не потому ли это происходит, что до сих пор арифметику рассматривали скорее с геометрической, чем с арифметической точки зрения? Так было всегда – и в древних, и в современных работах; примером тому является даже Диофант. Ибо хотя он и более чем другие освободился от геометрии в том отношении, что ограничивает свой анализ рассмотрением рациональных чисел, однако даже у него геометрия не полностью отсутствует...

Теперь арифметика имеет, так сказать, собственную область изучения – теорию целых чисел. Евклид лишь слегка затронул ее в своих «Началах», а его

[1] *Многое из того, что вошло в эту часть статьи, заимствовано из книги Г.Эдвардса «Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел».*

Иллюстрация В.Акатьевой