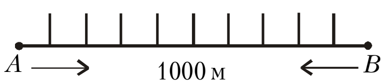
Решения задач М1811–М1815, Ф1823–Ф1832

М1811. *Два джентльмена одновременно начинают прогулку из пунктов А и В, чтобы завершить ее, соответственно, в пунктах В и А (см. рисунок). В каждый момент времени скорости джентльменов равны по величине. Между А и В 1000 м, через каждые 100 м от аллеи АВ отходит боковая аллея длиной 100 м. Поравнявшись с боковой аллеей, джентльмен может пройти по ней туда-обратно либо ее проигнорировать. Докажите, что встреча джентльменов неизбежна.*



Будем называть джентльменов A и B – по обозначениям концов аллеи, из которых они вышли. Гипотетическая возможность не встретиться и разминуться скрывается в наличии боковых аллей. Можно предположить, что пока джентльмен B находится где-то на боковой аллее, джентльмен A «проскакивает» ее начало по главной аллее. Зафиксируем этот предполагаемый момент времени t_0.

К моменту t_0 джентльмен A пройдет по парку $100k$ метров, k – целое число. Столько же, ввиду равенства скоростей, пройдет джентльмен B. Значит, джентльмен B в момент t_0 будет находиться либо в начале, либо в конце боковой аллеи. Если он в начале боковой аллеи, то произошла встреча в момент t_0. Если B находится в конце боковой аллеи, то это означает, что джентльмен A может переместиться из пункта A в пункт B, пройдя $100k + 100(k - 1) = 100(2k - 1)$ метров по парку. Но переместиться из A в B джентльмен A может, лишь пройдя по парку $100m$ метров, где m – непременно четное число.

Значит, встреча джентльменов неизбежна.

Напоследок вопрос для самоконтроля. Остается ли в силе утверждение задачи в случае $AB = 1100$ м?

В.Произволов

М1812. *Натуральные числа a, b и c таковы, что*

$$НОД\left(a^2-1, b^2-1, c^2-1\right)=1 .$$

Докажите, что

$$НОД\left(ab+c, bc+a, ca+b\right) = НОД\left(a,b,c\right).$$

(НОД – наибольший общий делитель.)

Рассмотрим произвольное простое число p и докажем, что оно входит в $НОД(ab+c, bc+a, ca+b)$ и $НОД(a, b, c)$ в равной степени. Заметим, что если $НОД(a, b, c)\vdots p$, то степень вхождения p в оба НОДа равна наименьшей степени вхождения p в числа a, b, c (если $НОД(a, b, c)\vdots p^k$, но c не делится на p^{k+1}, то $ab + c$ делится на p^k, но не делится на p^{k+1}). Поэтому достаточно доказать, что любой простой делитель q числа $НОД(ab+c, bc+a, ca+b)$ делит $НОД(a, b, c)$. Пусть, скажем, a не делится на q, тогда, поскольку $bc + a$ не делится на q, получаем, что b не делится на q и c не делится на q. Тогда

$$(ab+c)(bc+a)-a(ab+c)-c(bc+a)=ac\left(b^2-1\right)\vdots q .$$

Стало быть, $\left(b^2-1\right)\vdots q$. Аналогично, $\left(a^2-1\right)\vdots q$ и $\left(c^2-1\right)\vdots q$ – это уже противоречие с тем, что $НОД\left(a^2-1, b^2-1, c^2-1\right)=1$. Значит, $НОД(ab+c, bc+a, ca+b) = НОД(a, b, c)$.

А.Голованов

М1813. *Фигура F ограничена полуокружностью и двумя четвертушками окружности того же радиуса (рис.1).*

а) Разрежьте F на три части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

б) Разрежьте F на четыре части так, чтобы одна из них являлась квадратом, а из трех других можно было сложить второй такой же квадрат.

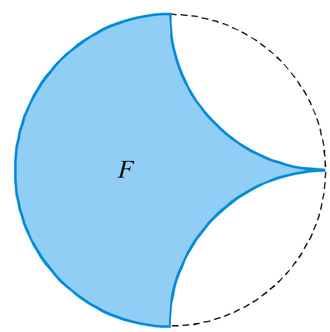


Рис.1

а) Это делается просто. На рисунке 2 показано разрезание фигуры F на части и складывание из них квадрата. Два сегмента отрезаются от F и приставляются иначе к оставшейся части – в результате получаем квадрат.

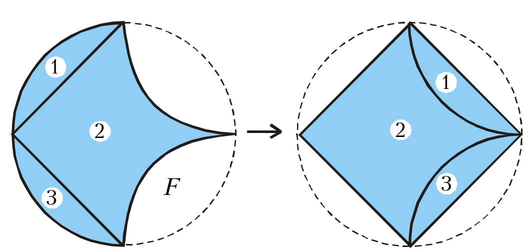


Рис.2

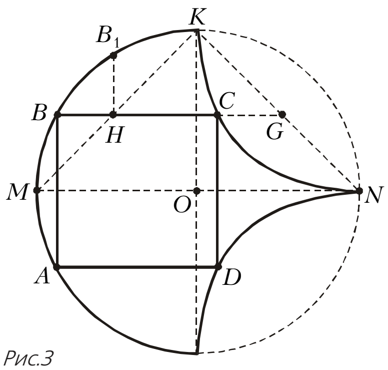


Рис.3

б) Пусть круг, содержащий фигуру F, имеет радиус $MO = = 1$ (рис.3). Впишем в F прямоугольник $ABCD$ такой, что $AB = 1$. Убедимся, что $ABCD$ – квадрат; для этого покажем, что $BC = 1$. Отрезок HG – средняя линия треугольника MKN, $HG = 1$. Далее, $\angle B_1HB = 90^\circ$, $BH = = B_1H = CG$. Значит, $BC = HG$, т.е. $BC = 1$. Таким образом, фигуру F можно представить как объединение двух частей: квадрата $ABCD$ и дополнительной части Q, составляющие элементы которой пристегнуты «точками-пуговками» A, B, C и D друг к другу.

Часть Q расположим на плоскости иначе – как показано

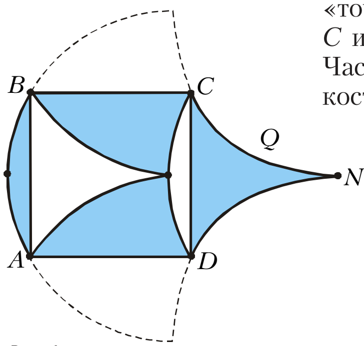


Рис.4

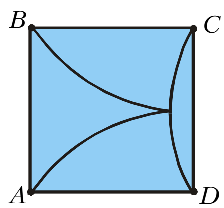


Рис.5

на рисунке 4, отразив нижний и верхний ее элементы относительно AD и BC. Далее, «расстегнув» пуговки A, B, C и D, расположим элементы так, чтобы они образовали второй квадрат $ABCD$ (рис.5). На этом завершим решение задачи-головоломки.

В.Произволов

М1814. *Пусть a, m_1, m_2 – натуральные числа, причем a взаимно просто как с m_1, так и с m_2. Обозначим через r_n остаток от деления целой части числа a^n/m_1 на m_2 ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Докажите, что последовательность $\{r_n\}$ является периодической.*

Так как $\text{НОД}(a, m_1) = \text{НОД}(a, m_2) = 1$, то $\text{НОД}(a, m_1m_2) = 1$. Пусть n_0 – какое-нибудь натуральное число, для которого a^{n_0} при делении на m_1m_2 дает в остатке 1. (Если $\text{НОД}(a, m_1m_2) = 1$, то такое число обязательно существует. Можно, например, положить $n_0 = \varphi(m_1m_2)$, где $\varphi(m)$ – функция Эйлера – см. статью В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» в «Кванте» №1 за 2000 год.)

Тогда $a^{n_0} = Qm_1m_2 + 1$ для некоторого целого числа Q. Теперь при любом $n \ge n_0$ имеем

$$\left[\frac{a^n}{m_1}\right] = \left[\frac{a^{n_0}a^{n-n_0}}{m_1}\right] = \left[\frac{(Qm_1m_2+1)a^{n-n_0}}{m_1}\right] =$$

$$= \left[a^{n-n_0}Qm_2 + \frac{a^{n-n_0}}{m_1}\right] = a^{n-n_0}Qm_2 + \left[\frac{a^{n-n_0}}{m_1}\right].$$

($[x]$ обозначает целую часть числа x).

Таким образом, остатки чисел $\left[a^n/m_1\right]$ и $\left[a^{n-n_0}/m_1\right]$ при делении на m_2 совпадают, т.е. $r_n = r_{n-n_0}$. Значит, последовательность $\{r_n\}$ имеет период длины n_0 (доказано также и то, что этот период начинается с самого начала последовательности).

Возникает вопрос о длине *наименьшего* периода последовательности $\{r_n\}$. Верно ли, что если в качестве n_0 взять *наименьшее* натуральное число такое, что a^{n_0} при делении на m_1m_2 дает в остатке 1, то n_0 и будет длиной наименьшего периода? Как показывает пример $a = 3$, $m_1 = 13$, $m_2 = 2$ (здесь $n_0 = 3$, а последовательность $\{r_n\}$ сплошь состоит из нулей), ответ на этот вопрос в общем случае отрицателен. Однако если дополнительно предположить, например, что $m_2 \ge m_1$, то ответ будет утвердительным (читателю предлагается доказать это в качестве упражнения).

Н.Осипов

М1815. *Общие перпендикуляры к противоположным сторонам неплоского четырехугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Докажите, что они пересекаются.*

Инструментом решения является теорема Менелая для пространственного четырехугольника, утверждающая, что *точки X, U, Y, V, взятые на сторонахчетырехугольника AB, BC, CD, DA или их продолжениях, лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда* $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BU}{UC}\cdot\frac{CY}{YD}\cdot\frac{DV}{VA} = 1$.

Для доказательства теоремы Менелая продолжим прямые XU и YV до пересечения с AC. Точки X, U, Y, V лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда все три прямые пересекаются в одной точке P либо параллельны (рис.1). Но в этом случае, применяя теорему

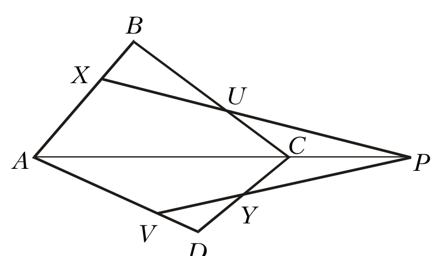


Рис.1

Менелая к треугольникам ABC и ACD, получаем $\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BU}{UC}\cdot\frac{CP}{PA} = 1$ и $\frac{CY}{YD}\cdot\frac{DV}{VA}\cdot\frac{AP}{PC} = 1$. Перемножая эти равенства, получим требуемое соотношение.

Пусть теперь XY – перпендикуляр к сторонам AB и CD, UV – перпендикуляр к AD и BC. При ортогональной проекции на плоскость, параллельную XY и UV, прямой угол между прямыми AB и XY остается прямым. Поэтому четырехугольник $ABCD$ проецируется в прямоугольник $A'B'C'D'$, а прямые XY и UV – в параллельные его сто-

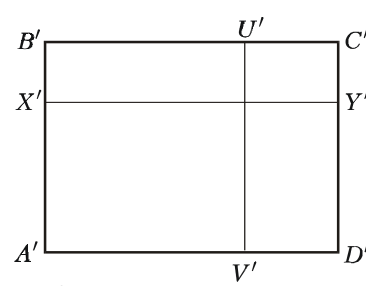


Рис.2

ронам прямые $X'Y'$ и $U'V'$ (рис.2). Очевидно, что $\frac{A'X'}{X'B'} \cdot \frac{B'U'}{U'C'} \cdot \frac{C'Y'}{Y'D'} \cdot \frac{D'V'}{V'A'} = 1$. Следовательно, $\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BU}{UC} \cdot \frac{CY}{YD} \cdot \frac{DV}{VA} = 1$, и по теореме Менелая точки X, Y, U, V лежат в одной плоскости. Отсюда сразу следует утверждение задачи.

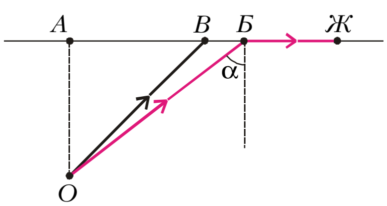
А.Заславский

Ф1823. *В поле, на расстоянии 1 км от прямой дороги, стоит и размышляет профессор Очков, большой знаток геометрической оптики. На расстоянии 2 км от ближайшей к профессору точки дороги А находится железнодорожная станция Ж. Скорость при ходьбе по полю равна 3 км/ч, по дороге – 4 км/ч. За какое минимальное время профессор может добраться до станции? А за какое время он смог бы добраться до середины отрезка АЖ?*

Профессору нужно решить – идти ли на станцию по полю вдоль прямой или дойти до какой-то точки дороги и дальше шагать по ней с большей скоростью, чем по полю. В зависимости от соотношения скоростей, при заданных положениях начальной и конечной точек пути может быть выгодным как первый, так и второй вариант.

Можно решить задачу «в лоб», обозначив буквой x расстояние от точки A до интересующей нас точки дороги, выразить через x время путешествия и взять от него производную. Минимум может достигаться в точках, где эта производная обращается в ноль, и на границах отрезка $АЖ$ – их обязательно нужно проверить.

Но тонкий намек на геометрическую оптику в условии задачи подсказывает нам удобную аналогию – ведь луч света всегда выбирает «самую лучшую» траекторию!



Пустим луч света так, чтобы он после «преломления» – выхода в среду с большей скоростью – попал в точку $Ж$ (см. рисунок). При этом угол «преломления» оказывается равным 90°, так что синус угла падения получается равным 0,75 (отношение скоростей – это «коэффициент преломления»). Обозначим нужную точку дороги буквой $Б$, тогда (поскольку $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}134$) $АБ$ = 1134 м и $БЖ$ = 866 м. При этом время движения составляет

$$t_1 = \frac{ОБ}{v_1} + \frac{БЖ}{v_2} = \frac{1512 \text{ м}}{3000 \text{ м/ч}} + \frac{866 \text{ м}}{4000 \text{ м/ч}} = 0{,}72 \text{ ч} .$$

А для путешествия в середину отрезка дороги (точку B) выгодно идти прямо по полю – эта точка находится «левее» точки $Б$. В этом случае

$$t_2 = \frac{1414 \text{ м}}{3000 \text{ м/ч}} = 0{,}47 \text{ ч} .$$

А.Очков

Ф1824. *На большой плоскости построена стена высотой 30 м. На расстоянии 30 м от стены на уровне земли расположена игрушечная пушка, а мишень установлена на расстоянии 80 м от пушки на прямой, перпендикулярной стене. При какой скорости снаряда возможно попадание?*

Можно решать эту задачу в общем виде, исследуя, например, уравнение траектории снаряда, брошенного под произвольным углом с неизвестной заранее скоростью. Но в данном случае намного проще получить решение прямо в числах.

Понятно, что вершина траектории находится на расстоянии 40 м от точки броска (по горизонтали). «Построим» еще одну стену высотой 30 м на расстоянии 80 м – 30 м = 50 м от точки броска. Ясно, что траектория, которая соответствует минимальной скорости выпущенного снаряда, почти касается верхних точек этих стен. Будем отсчитывать время от момента достижения верхней точки траектории. Тогда до второй стены снаряд долетит за время, которое в четыре раза меньше времени до падения (до стены по горизонтали 10 м, а до точки падения – 40 м). Движение по вертикали – свободное падение, поэтому за вчетверо меньшее время тело проходит по вертикали 1/16 часть полной высоты. Это означает, что высота стены составляет 15/16 от высоты траектории, и полная высота составит $H = 30 \text{ м} \cdot 16/15 = 32 \text{ м}$. Остальное совсем просто – время полета равно удвоенному времени падения с высоты H, т.е. $t = 2\sqrt{2H/g}$, и горизонтальная составляющая скорости равна

$$v_\text{г} = \frac{L}{t} = \frac{L}{2\sqrt{2H/g}} \approx 16 \text{ м/с} .$$

Вертикальная составляющая скорости при броске составляет

$$v_\text{в} = \sqrt{2gH} \approx 25 \text{ м/с} .$$

Таким образом, полная скорость снаряда при вылете равна примерно 30 м/с (считать все точнее без учета сопротивления воздуха просто не имеет смысла!).

А.Стрелков

Ф1825. *На гладком горизонтальном столе находится куб массой M = 2 кг, на его верхней грани лежит большой легкий лист бумаги, на нем – кубик массой m = 1 кг. Лист бумаги тянут с горизонтальной силой F = 15 Н. Коэффициент трения между бумагой и каждым из кубов $\mu = 0{,}7$. Найдите ускорения каждого из тел. А какими будут ускорения при силе F_1 = 10 Н?*

На лист бумаги действуют силы трения со стороны нижнего и верхнего кубов, причем суммарная сила трения не превышает значения $2\mu mg = 14$ Н. Это значит, что при действующей силе 15 Н лист бумаги движется с очень большим ускорением (его масса по условию мала), и оба тела проскальзывают относительно листа. Силы трения при этом максимальны, и ускорения кубов равны, соответственно,

$$a_1 = \mu g = 7 \text{ м/с}^2 \text{ и } a_2 = \frac{\mu mg}{M} = 3{,}5 \text{ м/с}^2 .$$

При силе 10 Н по крайней мере один из кубов движется вместе с листом бумаги (а может быть, и оба). Если бы оба куба двигались вместе с листом бумаги (без проскальзывания), то их ускорение составило бы

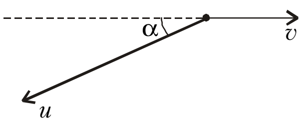
$$a_3 = \frac{F}{M+m} = 3{,}3 \text{ м/с}^2 .$$

Видно, что это ускорение меньше найденных выше величин, силы трения не выходят за максимальные значения – движение и в самом деле происходит без проскальзывания, а ускорения тел равны найденной величине. А вот если бы взять силу побольше, скажем 12 Н, то более тяжелый нижний куб начал бы отставать, его ускорение стало бы равным $a_2 = 3{,}5\ \text{м/с}^2$, сила трения снизу составила бы 7 Н, и верхний куб двигался бы с ускорением $a_4 = \dfrac{(12-7)\ \text{Н}}{1\ \text{кг}} = 5\ \text{м/с}^2$.

Р.Александров

Ф1826. *На гладкой горизонтальной плоскости находится клин массой M с углом α при основании. На клине удерживают неподвижно тонкий обруч массой m. Трение между обручем и поверхностью клина велико. Обруч отпускают, и он начинает двигаться по клину без проскальзывания. Найдите скорость клина в тот момент, когда центр обруча опустится на h.*

Обозначим скорость клина v, скорость центра обруча относительно клина u (см. рисунок). Движение обруча



происходит без проскальзывания (трение по условию велико), угловая скорость вращения обруча определяется относительным движением, поэтому «добавка» к кинетической энергии за счет вращения составит $0{,}5mu^2$. Для решения воспользуемся законом сохранения импульса (по горизонтали):

$$m(u\cos\alpha - v) = Mv,$$

откуда

$$u = \frac{v(n+1)}{\cos\alpha},\ \text{где}\ n = \frac{M}{m},$$

и законом сохранения механической энергии (проскальзывания нет – нет и выделения тепла):

$$\frac{1}{2}m\left((u\cos\alpha - v)^2 + (u\sin\alpha)^2\right) + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Mv^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(u^2 - 2uv\cos\alpha + v^2\right) + \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}Mv^2 =$$

$$= \frac{1}{2}mv^2(1+n)\left(\frac{2(1+n)}{\cos^2\alpha} - 1\right) = mgh.$$

Отсюда получаем

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1+\frac{M}{m}\right)\left(\frac{2(1+M/m)}{\cos^2\alpha} - 1\right)}}.$$

Р.Обручев

Ф1827. *Молекула водяного пара при попадании в воду может отразиться, а может и «прилипнуть» – стать молекулой жидкости. Оцените вероятность «прилипания», если известно, что при +20 °С в условиях низкой влажности уровень воды в блюдце понижается за минуту примерно на 1,5 мм. Давление насыщенных паров при этой температуре составляет приблизительно 2 кПа.*

При насыщении испарение и конденсация компенсируют друг друга. Испарение легко оценить по приведенным в условии данным. С единицы площади за минуту испаряется масса воды

$$m = 1\cdot 0{,}0015\cdot 1000\ \text{кг/мин} = 1{,}5\ \text{кг/мин}.$$

Это дает число молекул

$$N_{\text{исп}} = N_{\text{А}}\frac{m}{\text{M}} = 6\cdot 10^{23}\ \text{1/моль}\cdot\frac{1{,}5\ \text{кг/мин}}{0{,}018\ \text{кг/моль}} =$$

$$= 5\cdot 10^{25}\ \text{1/мин}.$$

Посчитаем теперь число ударов молекул насыщенного пара о единицу площади поверхности воды за минуту:

$$N = \frac{1}{2}nv\tau = \frac{1}{2}\frac{p}{kT}\sqrt{\frac{RT}{\text{M}}}\cdot 1\cdot 60 \approx 5\cdot 10^{27}\ \text{1/мин}.$$

Видно, что для динамического равновесия нужно, чтобы «прилипала» в среднем одна из ста ударяющихся молекул. Таким образом, вероятность «прилипания» получается порядка 0,01.

А.Паров

Ф1828. *Моль гелия расширяется при неизменной температуре T_0 = 300 К в заданных пределах, получая при этом от внешних тел количество теплоты Q = 20 кДж. Оцените работу газа при расширении в тех же пределах, но без подвода тепла извне.*

Внутренняя энергия моля гелия при данной температуре составляет $U = 1{,}5RT \approx 3{,}7$ кДж, что намного меньше количества теплоты, подведенного в процессе расширения. Это означает, что объем газа при расширении увеличился во много раз (оценку сделать легко, если знать формулу для расчета работы в изотермическом процессе – ведь при таком процессе все подведенное тепло идет на работу по расширению газа). Тогда легко сообразить, что без подвода тепла газ сможет совершить работу, практически равную «запасу» энергии: $A = U_{\text{нач}} - U_{\text{кон}} \approx U_{\text{нач}} = U \approx 3{,}7$ кДж.

А.Диабатов

Ф1829. *Простейший прибор для измерения сопротивления (омметр) состоит из последовательно соединенных батарейки, миллиамперметра и реостата (его часто называют переменным резистором или потенциометром). Измеряемый резистор подключают к выводам этой цепи. Перед началом измерений прибор настраивают – замыкают накоротко выводы цепи (это соответствует нулевому сопротивлению измеряемого резистора) и реостатом устанавливают стрелку миллиамперметра на конец шкалы. В нашем случае настроенный прибор при сопротивлении резистора R_1 = 500 Ом отклоняется на 3/4 шкалы, а при сопротивлении R_2 = 1500 Ом – на 1/2 шкалы. В каком месте шкалы у нашего омметра должна стоять отметка 1 кОм? А 300 Ом? Какое сопротивление еще можно измерить нашим прибором со сколь-нибудь разумной точностью, если суммарная погрешность измерений тока лежит в пределах ±2 деления шкалы (всего на шкале миллиамперметра 100 одинаковых делений)?*

Обозначим напряжение батарейки U, ток полного отклонения прибора I, сопротивление реостата r. Тогда можно записать систему уравнений:

$$\frac{U}{r+1500}=\frac{1}{2}I\ ,\ \frac{U}{r+500}=\frac{3}{4}I\ ,\ \frac{U}{r+R_x}=xI\ .$$

Отсюда легко найти $U/I=r=1500$ Ом и выразить зависимость величины x (доля шкалы, на которую отклоняется стрелка при сопротивлении R_x) от величины R_x:

$$x=\frac{1500}{1500+R_x}\ .$$

При сопротивлении 1000 Ом стрелка отклонится на $3/5$ шкалы, при 300 Ом – на $5/6$ шкалы.

Измерить можно сопротивление, при котором стрелка отклонится на 6—20 делений шкалы (в зависимости от того, что вы считаете разумной точностью). Это соответствует значениям x от 0,06 до 0,2 и сопротивлениям измеряемых резисторов в диапазоне от 20 кОм (примерно) до 6 кОм.

А.Простов

Ф1830. *Для определения емкости С конденсатора большой емкости применяется следующий метод. Конденсатор заряжают до напряжения батарейки, а затем разряжают его несколько раз при помощи конденсатора известной емкости C_0 = 10 мкФ, который каждый раз присоединяют к выводам батарейки, а затем подключают параллельно выводам конденсатора емкостью С в противоположной полярности – «плюсом» к «минусу». Так повторяют определенное число раз, а затем проверяют остаточный заряд конденсатора емкостью С, подключая к нему микроамперметр. После 8 повторов максимальное отклонение стрелки составило 10 делений. В следующем опыте после 9 повторов стрелка отклонилась на 20 делений в другую сторону. Определите по этим данным емкость С.*

Обозначим заряд конденсатора емкостью C после нескольких циклов переключения через Q. Тогда после очередного подключения маленького конденсатора с зарядом пластин q получится полный заряд $Q-q$ и заряд конденсатора емкостью C станет равным

$$\frac{(Q-q)C}{C+C_0}=(Q-q)a\ ,\ \text{где}\ \ a=\frac{C}{C+C_0}\ .$$

Теперь можно записать ряд значений заряда конденсатора начиная с Q_0:

$$Q_0\ ,\ Q_0a-aq\ ,\ Q_0a^2-q\left(a^2+a\right),$$

$$Q_0a^3-q\left(a^3+a^2+a\right),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ Q_0a^n-q\left(a^n+a^{n-1}+\ldots+a\right).$$

Выражение в последних скобках легко преобразовать, дополнив до бесконечно убывающей геометрической прогрессии, и заменить на $\left(a-a^{n+1}\right)/(1-a)$. Пусть после n циклов заряд большого конденсатора окажется в точности нулевым, тогда можно записать

$$Q_0a^n=q\frac{a-a^{n+1}}{1-a}\ .$$

Учтем, что $Q_0=CU$ и $q=C_0U$, и после простых преобразований получим

$$a=(0{,}5)^{1/n}\ .$$

Из этого выражения можно вычислить отношение

$$\frac{C}{C_0}=\frac{a}{1-a}\ .$$

Для приведенных в задаче чисел n = 8 и n = 9 получим отношения емкостей 11,05 и 12,5. Истинное значение ближе к 11,05 – простая пропорция дает для отношения емкостей конденсаторов $C/C_0=11{,}5$ и емкость C = 115 мкФ. При расчетах мы пренебрегли саморазрядом конденсаторов в процессе измерений (для обычных электролитических конденсаторов таких емкостей саморазряд может оказаться очень существенным), более точное вычисление неизвестной емкости при этом неоправданно.

З.Рафаилов

Ф1831. *Источник переменного напряжения $U=U_0\cos\omega t$ подключен к последовательно соединенным конденсатору емкостью С = 1 мкФ и катушке индуктивностью L = 1 Гн. Вольтметр, присоединенный к источнику, показывает напряжение U_1 = 1В, а если подключить его к катушке, он покажет U_2 = = 100 В. Какой может быть частота источника ω? Элементы цепи считайте при расчете идеальными. А если катушка намотана проводом, имеющим сопротивление, то при каком его сопротивлении описанное выше возможно?*

Из условия задачи ясно, что частота источника близка к собственной частоте контура $\omega_0=1/\sqrt{LC}=1000\ \text{с}^{-1}$, и мы наблюдаем резонанс. Если частота чуть ниже резонансной, то напряжение конденсатора больше, чем у катушки, и при напряжении катушки 100 В оно составляет 101 В (при одинаковых токах напряжения противофазны, а их «сумма» дает напряжение источника). В этом случае

$$U_L=I\omega_1L=100\ \text{В}\ ,\ U_C=\frac{I}{\omega_1C}=101\ \text{В}\ ,$$

откуда

$$\omega_1=\omega_0\sqrt{\frac{100}{101}}=995\ \ 1/\text{с}\ .$$

Если частота выше резонансной, то напряжение конденсатора меньше, оно равно 99 В, и в этом случае для частоты источника получим

$$\omega_2=\omega_0\sqrt{\frac{100}{99}}=1005\ \ 1/\text{с}\ .$$

Если в цепи есть сопротивление, то при резонансе ток определяется этим активным сопротивлением. Для получения напряжения на катушке $U_L=100$ В этот ток должен составить $I_0=U_L/(\omega_0L)=0{,}1$ А. Для этого сопротивление не должно превышать величины

$$r=\frac{U_1}{I_0}=10\ \text{Ом}\ .$$

Если сопротивление больше, то нужный ток не получается даже на резонансной частоте.

А.Зильберман

Ф1832. *Плоская монохроматическая волна с длиной λ = 0,55 мкм падает перпендикулярно на очень* *тонкий плоский непрозрачный лист. В листе прорезаны две длинные параллельные щели шириной 0,5 мм и 1 мм, а расстояние между ближайшими краями щелей составляет 0,5 мм. На расстоянии 10 м от листа параллельно ему расположен экран для наблюдения интерференции. На каком расстоянии от главного максимума располагается ближайшая серая полоса? Рассчитайте то же для ближайшей черной полосы.*

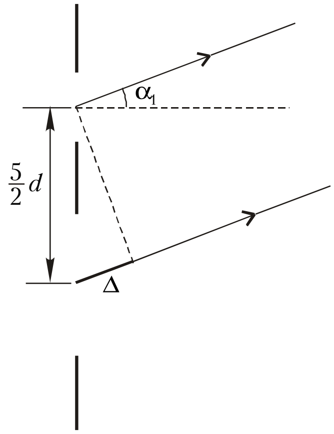


Рис.1

Серая полоса получится при вычитании волн от широкой и узкой щелей (рис.1). Разность хода Δ этих волн равна $(5/2)d\sin\alpha_1$, где d = 0,5 мм – ширина более узкой щели. Тогда

$$\frac{5}{2}d\sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{2}, \text{ откуда } \sin\alpha_1 = \frac{\lambda}{5d}.$$

Расстояние от середины центральной белой полосы (главного максимума) до середины ближайшей серой полосы составляет

$$x_1 = L\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 \approx L\sin\alpha_1 = \frac{L\lambda}{5\alpha} \approx 2\text{мм},$$

где L = 10 м – расстояние от щелей до экрана.

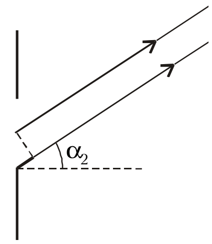


Рис.2

Ближайшая черная полоса получится в направлении, куда не излучает щель шириной d (рис.2):

$$\frac{d}{2}\sin\alpha_2 = \frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$x_2 = L\,\mathrm{tg}\,\alpha_2 \approx L\sin\alpha_2 = \frac{L\lambda}{d} \approx 1\text{ см}.$$

А.Волнов