**8.** На отрезке $[0; N]$ отмечены его концы и еще 2 точки так, что длины отрезков, на которые разбился отрезок $[0; N]$, целые и взаимно простые в совокупности. Если нашлись две отмеченные точки $A$ и $B$ такие, что расстояние между ними кратно 3, то можно разделить отрезок $AB$ на 3 равные части, отметить одну из точек деления и стереть одну из точек $A$ или $B$. Верно ли, что за несколько таких действий можно отметить любую наперед заданную целую точку отрезка $[0; N]$?

*И.Богданов, О.Подлипский*

## Заключительный этап

### 9 класс

**1.** Можно ли в клетках таблицы $2002 \times 2002$ расставить натуральные числа от 1 до $2002^2$ так, чтобы для любой клетки этой таблицы из строки или из столбца, содержащих эту клетку, можно было бы выбрать тройку чисел, одно из которых равно произведению двух других?

*Н.Агаханов*

**2.** На одной стороне угла с вершиной $O$ взята точка $A$, а на другой – точки $B$ и $C$ так, что $B$ лежит между $O$ и $C$. Проведена окружность с центром $O_1$, вписанная в треугольник $OAB$, и окружность с центром $O_2$, касающаяся стороны $AC$ и продолжений сторон $OA$, $OC$ треугольника $OAC$. Докажите, что если $O_1A = O_2A$, то треугольник $ABC$ равнобедренный.

*Л.Емельянов*

**3.** На плоскости отмечены 6 красных, 6 синих и 6 зеленых точек, причем никакие три из отмеченных точек не лежат на одной прямой. Докажите, что сумма площадей треугольников с вершинами одного цвета составляет не более четверти суммы площадей всех треугольников с отмеченными вершинами.

*Ю.Лифшиц*

**4.** См. задачу М1836 «Задачника «Кванта».

**5.** На шахматной доске стоят 8 ладей, не бьющих друг друга. Докажите, что среди попарных расстояний между ними найдутся два одинаковых. (Расстояние между ладьями – это расстояние между центрами клеток, в которых они стоят.)

*Д.Кузнецов*

**6.** Имеются одна красная и $k$ $(k > 1)$ синих ячеек, а также колода из $2n$ карт, занумерованных числами от 1 до $2n$. Первоначально вся колода лежит в произвольном порядке в красной ячейке. Из любой ячейки можно взять верхнюю карту и переложить ее либо в пустую ячейку, либо поверх карты с номером, большим на единицу. При каком наибольшем $n$ можно такими операциями переложить всю колоду в одну из синих ячеек?

*А.Белов*

**7.** Пусть $O$ – центр описанной окружности треугольника $ABC$. На сторонах $AB$ и $BC$ выбраны точки $M$ и $N$ соответственно таким образом, что $2\angle MON = \angle AOC$. Докажите, что периметр треугольника $MBN$ не меньше стороны $AC$.

*С.Берлов*

**8.** Из промежутка $\left(2^{2n}; 2^{3n}\right)$ выбрано $2^{2n-1}+1$ нечетное число. Докажите, что среди выбранных чисел найдутся два, квадрат каждого из которых не делится на другое.

*С.Берлов*

### 10 класс

**1.** Многочлены $P$, $Q$ и $R$ с действительными коэффициентами, среди которых есть многочлен второй степени и многочлен третьей степени, удовлетворяют равенству

$$P^2 + Q^2 = R^2 .$$

Докажите, что все корни одного из многочленов третьей степени действительные.

*А.Голованов*

**2.** Дан четырехугольник $ABCD$, вписанный в окружность $w$. Касательная к $w$, проведенная через $A$, пересекает продолжение стороны $BC$ за точку $B$ в точке $K$, а касательная к $w$, проведенная через $B$, пересекает продолжение стороны $AD$ за точку $A$ в точке $M$. Известно, что $AM = AD$ и $BK = BC$. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

*С.Берлов*

**3.** См. задачу М1837 «Задачника «Кванта».

**4.** В некотором государстве было 2002 города, соединенных дорогами так, что если запретить проезд через любой из городов, то из любого из оставшихся городов можно добраться до любого другого. Каждый год король выбирает некоторый несамопересекающийся циклический маршрут и приказывает построить новый город, соединить его дорогами со всеми городами выбранного маршрута, а все дороги этого маршрута закрыть за ненадобностью. Через несколько лет в стране не осталось ни одного несамопересекающегося циклического маршрута, проходящего по ее городам. Докажите, что в этот момент количество городов, из которых выходит ровно одна дорога, не меньше 2002.

*А.Пастор*

**5.** Сумма положительных чисел $a$, $b$, $c$ равна 3. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ac .$$

*С.Злобин*

**6.** См. задачу 6 для 9 класса.

**7.** Пусть $A'$ – точка касания вневписанной окружности треугольника $ABC$ со стороной $BC$. Прямая $a$ проходит через точку $A'$ и параллельна биссектрисе внутреннего угла $A$. Аналогично строятся прямые $b$ и $c$. Докажите, что $a$, $b$ и $c$ пересекаются в одной точке.

*Л.Емельянов*

**8.** См. задачу М1838 «Задачника «Кванта».

### 11 класс

**1.** См. задачу 1 для 10 класса.

**2.** На плоскости отмечены несколько точек. Для любых трех из них существует декартова система координат (т.е. перпендикулярные оси и общий масштаб), в которой эти точки имеют целые координаты. Докажите, что существует декартова система координат, в которой все отмеченные точки имеют целые координаты.

*С.Берлов*

**3.** Докажите. что для всех $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ при $n > m$, где $n$, $m$ – натуральные, справедливо неравенство

$$2\left|\sin^n x - \cos^n x\right| \leq 3\left|\sin^m x - \cos^m x\right| .$$

*В.Сендеров*

**4.** В городе несколько площадей. Некоторые пары площадей соединены улицами с односторонним движением так, что с каждой площади можно выехать ровно по двум улицам.