

Поэтому

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{CD^2}{CE} = \frac{(3y)^2}{y} = 9y.$$

Значит,

$$\frac{CE}{AC} = \frac{y}{9y} = \frac{1}{9},$$

и искомая площадь равна

$$S_{\Delta CDE} = \frac{CE}{AC} \cdot S_{\Delta ADC} = \frac{1}{9} \cdot 18 = 2.$$

Упражнение 12. В окружности проведены хорды AC и BD , пересекающиеся в точке E , причем касательная к окружности, проходящая через точку A , параллельна BD . Известно, что $CD : ED = 3 : 2$, $S_{\Delta ABE} = 8$. Найдите площадь треугольника ABC .

Задача 10. Биссектриса AA_1 треугольника ABC продолжена до пересечения в точке A_2 с описанной окружностью (рис.12). а) Докажите, что

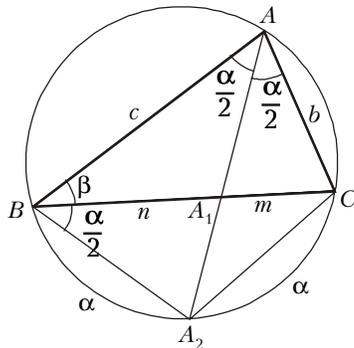


Рис. 12

б) Докажите, что $l_a^2 = bc - mn$, где l_a – биссектриса угла A , $AC = b$, $AB = c$, $A_1C = m$, $A_1B = n$.

$$\begin{aligned} \angle AA_1C &= \angle ABA_2, \\ \angle AA_1B &= \angle CA_2A. \end{aligned}$$

Решение. а) В точке A_1 пересекаются хорды AA_2 и BC . С учетом теоремы о вписанном угле имеем две пары подобных треугольников (по двум углам) – это треугольники AA_1B и CA_1A_2 , а также AA_1C и BA_1A_2 . Каждое из указанных подобий дает известное свойство отрезков хорд: $AA_1 \cdot A_1A_2 = BA_1 \cdot A_1C$, откуда

$$l_a x = mn, \quad (*)$$

где $x = A_1A_2$. Поскольку

$$\angle BAA_2 = \angle CAA_2 = \angle CBA_2 = \angle BCA_2 = \frac{\alpha}{2},$$

где $\alpha = \angle BAC$, получаем, что

$$\Delta AA_2B \sim \Delta ACA_1 \sim \Delta BA_2A_1,$$

а также

$$\Delta AA_2C \sim \Delta ABA_1 \sim \Delta CA_2A_1.$$

Из доказанных подобий следует, что, например,

$$\angle AA_1C = \angle ABA_2.$$

Иначе равенство этих же углов можно доказать непосредственно вычислением:

$$\angle AA_1C = \frac{\alpha}{2} + \beta \text{ – как внешний угол для } \Delta ABA_1,$$

$$\angle ABA_2 = \frac{\alpha}{2} + \beta \text{ – как угол в } \Delta ABA_2.$$

Значит,

$$\angle AA_1C = \angle ABA_2.$$

Аналогичными способами можно доказать равенство

$$\angle AA_1B = \angle CA_2A.$$

б) Из подобия ΔAA_2B и ΔACA_1 имеем

$$\frac{AA_2}{AC} = \frac{AB}{AA_1} \Leftrightarrow \frac{l_a + x}{b} = \frac{c}{l_a} \Rightarrow l_a^2 + l_a x = bc,$$

откуда, с учетом (*), находим

$$l_a^2 = bc - mn.$$

Мы получили важную формулу, позволяющую в некоторых случаях вычислять биссектрису угла треугольника.

Задача 11. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , $AB = AD$, CA – биссектриса угла C , $\angle BAD = 140^\circ$, $\angle BEA = 110^\circ$. Найдите угол CDB .

Решение. Мы уже встречались со стандартным построением – продолжением биссектрисы треугольника до пересечения с описанной окружностью. В полученном при этом вписанном четырехугольнике (например, четырехугольнике $BCDA$) оказываются равными две вновь полученные стороны ($BA = DA$, так как по теореме о вписанном угле $\angle DBA = \angle BDA = \frac{1}{2} \angle BCD$).

В данной задаче ситуация обратная. Известно (рис.13), что отрезок CE – биссектриса угла C в ΔBCD ; биссектриса CE продолжена так, что в четырехугольнике $BCDA$ равны стороны BA и DA (по условию). Докажем, что четырехугольник $BCDA$ является вписанным. Достаточно убедиться, что описанная около ΔBCD окружность пройдет через точку A . Действительно, так как $BA = AD$, то $\angle DBA = \angle BDA$. Поэтому середина дуги BmD , как и точка A , лежит на биссектрисе угла B и на серединном перпендикуляре к хорде BD . Значит, точка A совпадает с серединой дуги BmD , и четырехугольник $BCDA$ является вписанным.

Во вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° . Поэтому

$$\angle BCD = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ,$$

$$\angle ABD = \angle ACD = \frac{1}{2} \angle BCD = \frac{1}{2} \cdot 40^\circ = 20^\circ,$$

$$\angle CDB = \angle CAB = \angle EAB =$$

$$= 180^\circ - (\angle ABD + \angle BEA) = 180^\circ - (20^\circ + 110^\circ) = 50^\circ.$$

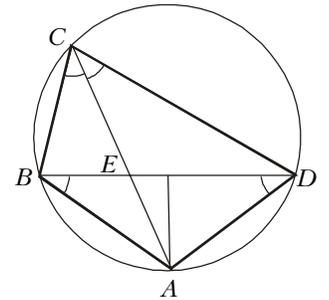


Рис. 13

Упражнения

13. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , $AB = BC$, DB – биссектриса угла D , $\angle ABC = 100^\circ$, $\angle BEA = 70^\circ$. Найдите угол CAD .

14 (МГУ, геогр. ф-т, 1994). В треугольнике KMN проведены высота NA , биссектриса NB и медиана NC , которые делят угол KNM на четыре равные части. Найдите высоту NA , биссектрису NB и медиану NC , если радиус описанной около треугольника KMN окружности равен R .

15. Найдите углы треугольника ABC , если его высота и медиана, проведенные из вершины C , делят угол ACB на 3 равные части.