получаем

$$R_{BHC} = \frac{BC}{2\sin(\pi-\alpha)} = \frac{a}{2\sin\alpha} = R\ .$$

Для отыскания AH заметим, что точки A, B_1, C_1 и H лежат на одной окружности с диаметром AH (см. рис.3). По теореме синусов, $C_1B_1 = AH\sin\alpha$. Найдем отрезок B_1C_1. Для этого заметим, что треугольник B_1AC_1 подобен треугольнику ABC, ибо из прямоугольных треугольников BB_1A и CC_1A получаем

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC} = \cos\alpha$$

(или $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$ при $\alpha > \frac{\pi}{2}$). Поэтому треугольники B_1AC_1 и ABC подобны с коэффициентом $|\cos\alpha|$. Но тогда

$$B_1C_1 = a|\cos\alpha|$$

и

$$AH = a|\operatorname{ctg}\alpha|\ .$$

Упражнения

1. Из точек A и A_1, лежащих по одну сторону от прямой BC, отрезок BC виден под одним и тем же углом $\alpha \neq 0$. Докажите, что около четырехугольника BAA_1C можно описать окружность.

2. Из точек A и A', лежащих по разные стороны от прямой BC, отрезок BC виден под углами α и $180^\circ - \alpha$ соответственно. Докажите, что около четырехугольника $BACA'$ можно описать окружность.

3. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

4. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является описанным тогда и только тогда, когда $AB + CD = AD + BC$.

5. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AB_1C_1 (см. задачу 1).

Задача 2 (МГУ, мехмат, 1972). *В треугольнике KLM угол L тупой, а длина стороны KM равна 6. Найдите радиус описанной около треугольника KLM окружности, если известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящий через вершины K, M и точку пересечения высот треугольника KLM.*

Решение. Обозначим через H ортоцентр треугольника KLM, через O – центр окружности, проходящей через точки K, M, H (рис.4). По условию угол L тупой. Поэтому точка H лежит вне $\triangle KLM$, точка L является точкой пересечения высот в $\triangle KHM$ и лежит внутри $\triangle KHM$, а треугольник KHM – остроугольный (его углы при вершинах K, H, M являются острыми углами прямоугольных треугольников MKM_1, MHM_1, KMK_1 соответственно).

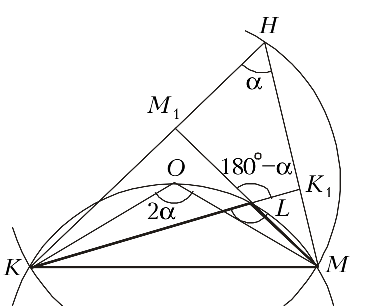

Рис. 4

Пусть $\angle KHM = \alpha$. Тогда центральный угол KOM равен 2α. Из точек O и L окружности KLM хорда KM видна под одним и тем же углом: $\angle KLM = \angle KOM = 2\alpha$. Но $\angle KLM = \angle K_1LM_1 = 180^\circ - \alpha$, так как в четырехугольнике LK_1HM_1 углы при вершинах K_1 и M_1 прямые. Поэтому $2\alpha = 180^\circ - \alpha$, т.е. $\alpha = 60^\circ$, $\angle KLM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, и по теореме синусов искомый радиус равен

$$R_{KLM} = \frac{KM}{2\sin\angle KLM} = \frac{6}{2\sin 120^\circ} = 2\sqrt{3}\ .$$

Упражнение 6. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найдите длину стороны AC.

Задача 3 (МГУ, биофак, 1990). *Из точки M на окружности проведены три хорды: MN = 1, MP = 6, MQ = 2. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.*

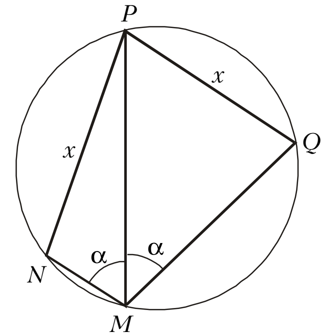

Рис. 5

Решение. Пусть R – искомый радиус, $\angle NMP = \angle QMP = \alpha$, $NP = x$ (рис. 5). Тогда $PQ = 2R\sin\alpha = x$ (в окружности против равных вписанных углов лежат равные хорды). Теорема косинусов для $\triangle MPN$ и $\triangle MPQ$ дает систему относительно x и $\cos\alpha$:

$$\begin{cases} x^2 = 1^2 + 6^2 - 2\cdot 1\cdot 6\cdot\cos\alpha, \\ x^2 = 2^2 + 6^2 - 2\cdot 2\cdot 6\cdot\cos\alpha, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x = \sqrt{34}, \\ \cos\alpha = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

а

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}\ .$$

Значит,

$$R = \frac{x}{2\sin\alpha} = 2\sqrt{\frac{34}{15}}\ .$$

Упражнение 7. Через вершину угла A проведена окружность, пересекающая стороны угла в точках M и N. Биссектриса этого угла пересекает окружность в точке P. Найдите радиус окружности, если $AM = 1$, $AN = 2$, $AP = 4$.

Задача 4 (МГУ, физфак, 1971). *Пятиугольник ABCDE вписан в окружность. Расстояния от вершины E до прямых AB, BC и CD равны a, b и c соответственно. Найдите расстояние от вершины E до диагонали AD.*

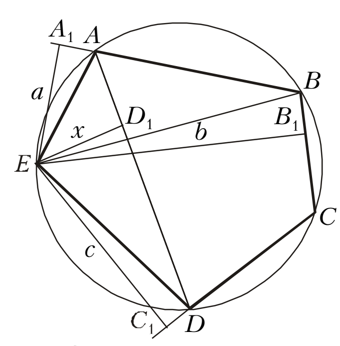

Рис. 6

Решение. Докажем следующее свойство точки E окружности (рис.6):

Если $A_1E = a$, $B_1E = b$, $C_1E = c$, $D_1E = x$ – соответственно, расстояния от точки E окружности до прямых AB, BC, CD, AD, образующих вписанный четырехугольник ABCD, то

$$ac = bx.$$

Доказательство вытекает из наличия двух пар подобных