них. Первоначальный заряд на конденсаторе был

$$Q_1 = C_1\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}}{d},$$

а после перемещения стал

$$Q_2 = C\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}}{d+\varepsilon x}.$$

Теперь найдем энергию, запасенную в конденсаторе в двух состояниях – исходном и конечном:

$$W_1 = \frac{C_1\mathcal{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{2d},$$

$$W_2 = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{2(d+\varepsilon x)}.$$

Перемещая обкладку конденсатора, мы совершили работу A. По закону сохранения энергии эта работа пошла на изменение энергии конденсатора и на работу против ЭДС источника, поскольку при перемещении обкладки конденсатора его заряд уменьшается и ток течет против ЭДС:

$$A = (W_2 - W_1) + (Q_1 - Q_2)\mathcal{E} =$$

$$= \left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{2(d+\varepsilon x)} - \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{2d}\right) + \left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{d} - \frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{d+\varepsilon x}\right) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon^2 S\mathcal{E}^2 x}{2d(d+\varepsilon x)}.$$

Отсюда находим искомое перемещение пластины конденсатора:

$$x = \frac{d}{\varepsilon\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon S\mathcal{E}^2}{2Ad} - 1\right)}.$$

Задача 4. *В плоский конденсатор вдвигается с постоянной скоростью v пластина из диэлектрика (рис.6). Определите ток в цепи батареи, подключенной к конденсатору. Считать известными ЭДС батареи $\mathcal{E}$, диэлектрическую проницаемость ε, высоту пластины h, площадь квадратных пластин конденсатора $S = b^2$.*

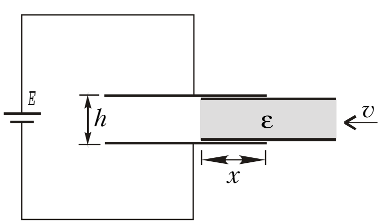

Рис. 6

Выберем в качестве переменной величины длину диэлектрика, находящегося в конденсаторе. Найдем емкость конденсатора в тот момент, когда пластина вошла в конденсатор на величину x. Такой конденсатор эквивалентен системе двух параллельно соединенных конденсаторов: воздушного емкостью

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S(b-x)}{bh}$$

и диэлектрического емкостью

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon Sx}{bh}.$$

Емкость нашей системы равна

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 S\left(b + (\varepsilon-1)x\right)}{bh}.$$

Заряд на конденсаторе в этот момент равен

$$Q = C\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}\left(b + (\varepsilon-1)x\right)}{bh}.$$

Следовательно, в цепи батареи идет ток

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}(\varepsilon-1)}{bh}\frac{dx}{dt} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}(\varepsilon-1)}{bh}v = \frac{\varepsilon_0 b\mathcal{E}(\varepsilon-1)v}{h}.$$

Задача 5. *В широкий сосуд с жидкостью частично погружается плоский конденсатор. Конденсатор подключен к батарее, которая поддерживает на обкладках конденсатора постоянную разность потенциалов U. Расстояние между пластинами d, плотность жидкости ρ, диэлектрическая проницаемость ε. На какую высоту поднимется жидкость в кондесаторе? Поверхностным натяжением пренебречь.*

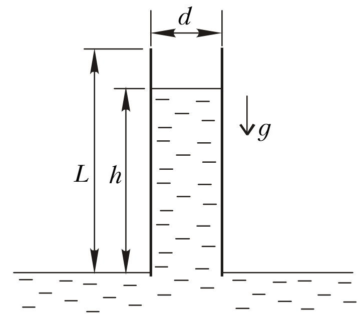

Рис. 7

Обозначим высоту подъема жидкости через h, высоту пластин через L, а размер пластин в направлении, перпендикулярном рисунку 7, через a. Идея решения задачи заключается в следующем: запишем полную энергию нашей системы, которая является функцией от h, а затем исследуем ее на минимум по переменной h. Очевидно, что при некотором h энергия системы будет минимальна, а производная энергии по h будет равна нулю. Это и будет установившаяся высота подъема жидкости.

Сначала найдем емкость нашего конденсатора при подъеме жидкости на высоту h. Мы имеем систему двух параллельных конденсаторов, поэтому общая емкость равна их сумме:

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon ha}{d} + \frac{\varepsilon_0(L-h)a}{d} = \frac{\varepsilon_0 a}{d}\left(h(\varepsilon-1) + L\right).$$

Электрическая энергия, запасенная в конденсаторе, равна

$$W_1 = \frac{CU^2}{2}.$$

Потенциальная энергия поднятой жидкости при нулевом уровне, отсчитываемым от уровня жидкости в сосуде, составляет

$$W_2 = \frac{ad\rho gh^2}{2}.$$

Энергию, запасенную в батарее, можно записать в виде

$$W_3 = W_0 - QU = W_0 - CU^2,$$

где W_0 – полный запас энергии батареи, а CU^2 – это израсходованная энергия батареи, т.е. работа, которую совершила батарея, заряжая конденсатор до напряжения U. Полная энергия нашей системы равна

$$W = W_1 + W_2 + W_3 =$$

$$= \frac{CU^2}{2} + \frac{ad\rho gh^2}{2} + W_0 - CU^2 = \frac{ad\rho gh^2}{2} - \frac{CU^2}{2} + W_0.$$

Подставив сюда выражение для емкости, получим

$$W = \frac{ad\rho gh^2}{2} - \frac{\varepsilon_0 a\left(h(\varepsilon-1)+L\right)U^2}{2d} + W_0.$$

Продифференцируем это выражение по h и приравняем к нулю:

$$\frac{dW}{dh} = ad\rho gh - \frac{\varepsilon_0 a(\varepsilon-1)U^2}{2d} = 0.$$