можно получить

$$-\frac{\Delta N}{\Delta r} = N\frac{mg}{kT}\,. \qquad (4)$$

Из выражений (3) и (4) найдем окончательно

$$-\frac{\Delta n}{n\Delta r} \approx \alpha N\frac{mg}{kT}\,.$$

Подставляя сюда значения нужных величин для обеих планет, получим следующую таблицу (здесь $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг – масса протона):

	m/m_p	T, К	g, м/с^2	R, м	$1/R$, см$^{-1}$	$\Delta n/n\Delta r$, м$^{-1}$
Земля	29	300	9,8	$6{,}4\cdot10^6$	$1{,}6\cdot10^{-7}$	$3{,}4\cdot10^{-8}$
Венера	44	800	8,5	$6{,}2\cdot10^6$	$1{,}6\cdot10^{-7}$	$1{,}1\cdot10^{-6}$

Из последнего столбца следует, что кривизна луча на уровне Земли меньше, чем кривизна поверхности планеты, в то время как в атмосфере Венеры луч «кривее» ее поверхности. Это явление и называют сверхрефракцией.

Напомним, что при вычислениях использовалось значение концентрации молекул у поверхности планеты. Поднимаясь все выше – в горы или на аэростате, – можно найти такую точку O над поверхностью Венеры, что луч, выпущенный горизонтально, возвратится к нам, обогнув планету. И осуществится мечта: мы увидим-таки свой затылок далеко впереди. Если, конечно, пренебречь поглощением света в атмосфере.

Рефракция имеет место и в атмосфере Солнца (фотосфере). Казалось бы, какое нам дело до той рефракции? А вот и есть дело. Ученые как-то решили понаблюдать, как свет звезды, заходящей за диск Солнца, отклоняется в поле тяготения. Ведь каждый фотон обладает массой $h\nu/c^2$ (h – постоянная Планка, ν – частота); следовательно, пролетая у поверхности гравитирующего тела, он должен испытывать отклонение в сторону его центра.

Оценим прежде всего порядок величины этого угла отклонения θ. Очевидно, что наибольшая сила, действующая на фотон, будет на самом краю солнечного диска:

$$F_{\max} = -G\left(\frac{h\nu}{c^2}\right)\frac{M_\odot}{R_\odot^2}\,,$$

где G – гравитационная постоянная, $\odot$ – астрономический знак Солнца. Очевидно также, что наиболее существенное отклонение фотон будет испытывать не вдалеке, а где-то в пределах расстояний, сравнимых с размерами самого Солнца, и за время $\Delta t \sim 2R_\odot/c$. Таким образом, радиальное изменение импульса фотона будет равно

$$\Delta P_r = F_{\max}\Delta t\,.$$

Значит, искомый угол (а он заведомо мал) будет порядка (см. рисунок *в*)

$$\theta \sim \frac{\Delta P_r}{P} = \frac{F_{\max}\Delta t}{h\nu/c} \sim -G\frac{2M_\odot}{c^2R_\odot}\,.$$

Интересно, что он одинаков для фотонов любой частоты. Подставляя численные значения ($M_\odot = 2\cdot10^{30}$ кг, $R_\odot = 0{,}7\cdot10^9$ м), найдем

$$|\theta| \sim \frac{2\cdot2\cdot10^{30}\ \text{кг}\cdot6{,}67\cdot10^{11}\ \text{м}^3/\text{кг}\cdot\text{с}^2}{\left(3\cdot10^8\ \text{м/с}\right)^2\cdot0{,}7\cdot10^9\ \text{м}} = 4{,}2\cdot10^{-6}\ \text{рад} = 0{,}87''$$

(меньше одной угловой секунды). Значение, предсказываемое общей теорией относительности (ОТО), вдвое больше: $\theta_{\text{ОТО}} = 1{,}7''$ (это объясняется искривлением пространства около гравитирующего тела – что не учитывает ньютоновская теория тяготения).

Конечно, измерение этого угла принципиально важно для проверки теории. Но дело в том, что неоднородность атмосферы Солнца может как-то маскировать исследуемый эффект. Рассмотрим поэтому и рефракцию электромагнитной волны в плазме фотосферы.

Ясно, что электрическое поле электромагнитной волны $\vec{E}$ стремится сместить положительные заряды вдоль своего направления, отрицательные заряды (электроны) – в противоположном направлении. Но первые гораздо массивнее вторых (даже самый легкий из ионов – протон – почти в 2000 раз «тяжелее» электрона), так что смещением ионов можно пренебречь. Сила же, действующая на электрон, равна $-eE(t)$. Пусть электрическое поле в волне колеблется с частотой ω, так что в рассматриваемой точке его можно записать, например, в виде

$$E(t) = E_m\sin\omega t\,,$$

где E_m – амплитуда. Это поле стремится много раз в секунду ($\nu = \omega/(2\pi)$) «таскать» электроны вверх-вниз. Но каждый из них обладает массой m_e, которая есть мера инертности, т.е. нежелания смещаться из положения равновесия. Если в единице объема находится N_e электронов, их массовая плотность равна m_eN_e. Понятно, что все перечисленные факторы как-то должны войти в окончательное выражение для скорости распространения волны в плазме $c_{\text{п}}$. Оставляя в стороне строгий вывод (в него входят еще рассуждения о различии *фазовой* и *групповой* скоростей волны), приведем окончательный результат:

$$c_{\text{п}} = c\sqrt{1-\frac{\omega_*^2}{\omega^2}}\,,$$

где в выражение для ω_* (*плазменной* частоты) вошли перечисленные выше параметры:

$$\omega_*^2 = \frac{N_ee^2}{\varepsilon_0m_e} \qquad (5)$$

(множитель ε_0 свидетельствует об использовании Международной системы единиц). Значит, коэффициент преломления в этом случае равен

$$n = \frac{c}{c_{\text{п}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\omega_*^2/\omega^2}} > 1\,. \qquad (6)$$

И значит, электромагнитная волна, проходя у края диска Солнца, должна отклоняться от «прямой линии». Таким образом, искомый эффект, действительно, может быть замаскирован атмосферной рефракцией.

Но можно подобрать такие частоты ω, на которых рефракция была бы несущественной. В самом деле, плазменная частота зависит от концентрации электронов (5), а последняя – от высоты над поверхностью Солнца. Следовательно, можно найти относительное приращение $-\dfrac{\Delta n}{\Delta r}$ (продифференцировав (6) при фиксированном значении ω или графически) и потребовать, чтобы эта величина была много меньше, чем кривизна $1/R_\odot$, – точно так же, как это было сделано для Земли и Венеры. А отсюда и можно найти допустимые значения ω. Но эту работу предоставим сделать перед сном самому Читателю.