Кинематика в планиметрии

В.РЫЖИК, Б.СОТНИЧЕНКО

В самых разных сборниках геометрических задач можно встретить задачи такого рода: берется некий треугольник (четырехугольник) и на его сторонах строятся какие-либо треугольники (четырехугольники). Оказывается, что полученная конфигурация обладает особыми свойствами, каковые и предлагается обнаружить.

Методы решения этих задач чаще всего вполне стандартные. Но бывает, что используют векторы или преобразования. Мы хотим показать еще один способ решения задач такого типа. Основан он будет на векторах, но только рассматриваться эти векторы будут с кинематической точки зрения, как радиусы-векторы какой-то движущейся точки.[1] При этом мы опишем достаточно общий метод получения результатов. Да и сами результаты будут обладать некоторой степенью общности.

Для понимания дальнейшего необходимы некоторые сведения о векторах на плоскости.

Кроме хорошо известных линейных операций с векторами – сложения и умножения на число, нам понадобится еще одна линейная операция – поворот вектора на заданный угол. Если вектор $\vec{a}$ поворачивается на угол α, то в результате получается вектор, который мы будем обозначать так: $\vec{a}^{\alpha}$. При этом угол α может быть положительным – при повороте против часовой стрелки – и отрицательным – при повороте по часовой стрелке. Свойства этой операции таковы:

1°. $\left|\vec{a}^{\alpha}\right| = \left|\vec{a}\right|$.

2°. $\vec{a}^{0} = \vec{a}$, $\vec{a}^{\pi} = -\vec{a}$, $\vec{a}^{2\pi} = \vec{a}$.

3°. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^{\alpha} = \vec{a}^{\alpha} + \vec{b}^{\alpha}$.

4°. $(\lambda\vec{a})^{\alpha} = \lambda\left(\vec{a}^{\alpha}\right)$.

Свойства 3° и 4° означают линейность операции поворота вектора.

5°. $\left(\vec{a}^{\alpha}\right)^{\beta} = \vec{a}^{\alpha+\beta}$.

Иначе говоря, если мы сначала поворачиваем вектор на угол α, а потом на угол β, то это означает, что мы повернули его на угол $\alpha+\beta$.

6°. $\vec{a}^{\alpha+\beta} = \vec{a}^{\beta+\alpha}$.

Иначе говоря, поворот вектора на суммарный угол можно выполнять в любом порядке – результат не изменится.

7°. $\left(\vec{a}^{\alpha}\right)^{-\alpha} = \vec{a}$.

Переходим теперь к кинематическим фактам. Пусть $\vec{r}$ – радиус-вектор движущейся точки, а $\vec{V}$ – ее скорость. Тогда справедливы следующие утверждения:

8°. Если $\vec{r} = \overrightarrow{\text{const}}$, то $\vec{V} = \vec{0}$.

9°. Если $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, то $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

10°. Если $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$, то $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \overrightarrow{\text{const}}$.

11°. Если $\vec{r}_2 = \lambda\vec{r}_1$, то $\vec{V}_2 = \lambda\vec{V}_1$.

12°. Если $\vec{V}_2 = \lambda\vec{V}_1$, то $\vec{r}_2 = \lambda\vec{r}_1 + \overrightarrow{\text{const}}$.

13°. Если $\vec{r}_2 = \vec{r}_1^{\alpha}$, то $\vec{V}_2 = \vec{V}_1^{\alpha}$.

14°. Если $\vec{V}_2 = \vec{V}_1^{\alpha}$, то $\vec{r}_2 = \vec{r}_1^{\alpha} + \overrightarrow{\text{const}}$.

Доказательства равенств 1°–14° приведены в упомянутой выше книге. По сути своей равенства 8°–14° сводятся к дифференцированию и интегрированию вектора-функции. Заметим, что постоянный вектор в равенствах 10°, 12°, 14° зависит от выбора начала радиусов-векторов. Это значит, что при разных началах радиусов-векторов константа меняется. В остальных равенствах выбор начала не имеет значения, т.е. если равенство верно при выборе начала в какой-то точке, то оно верно и тогда, когда начало выбрано в любой другой точке.

Заметим также, что хотя для задания положения движущейся точки радиусом-вектором начало его может быть выбрано произвольно, для задания ее скорости это не существенно. В самом деле, посмотрим на рисунок 1. На нем изображена движущаяся точка M, а также два ее радиуса-вектора с началами в разных точках O_1 и O_2: $\overrightarrow{O_1M} = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{O_2M} = \vec{r}_2$. Из рисунка видно, что $\vec{r}_2 = \overrightarrow{O_2O_1} + \vec{r}_1$, где вектор $\overrightarrow{O_2O_1}$ является постоянным. Дифференцируя это равенство по времени, мы получим, что производные радиусов-векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ равны. Это и будет скорость точки M.

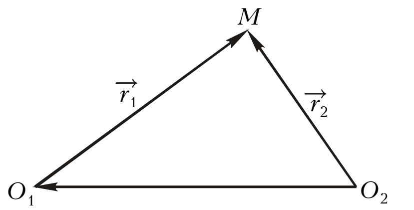

Рис. 1

Кинематика в треугольнике

Теперь покажем, как работает векторно-кинематическая техника, на частном примере, при решении такой задачи. (В дальнейшем ориентация вершин треугольников и четырехугольников – против часовой стрелки.)

Задача 1. *На сторонах AC и BC треугольника ABC во внешнюю от треугольника сторону построены квадраты (рис.2). Точки N и M – центры этих квадратов, а точка K – середина стороны AB. Докажите, что треугольник NKM – равнобедренный прямоугольный с прямым углом при вершине K.*

[1] *Необходимая теория для использования этого метода подробно описана в книге: Ю.И.Любич, Л.А.Шор. «Кинематический метод в геометрических задачах» (М.: Наука, 1976). Из этой же книги взяты некоторые приведенные дальше задачи.*