LXV Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. Решите ребус $БАО \cdot БА \cdot Б = 2002$.

А.Блинков, А.Хачатурян

2. Незнайка разрезал фигуру (рис.1) на трехклеточные и четырехклеточные уголки, нарисованные справа от нее. Сколько трехклеточных уголков могло получиться?

А.Митягин

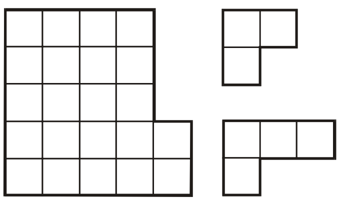

Рис. 1

3. На доске были написаны 10 последовательных натуральных чисел. Когда стерли одно из них, то сумма девяти оставшихся оказалась равна 2002. Какие числа остались на доске?

В.Произволов

4. Художник-авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 7×7, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна – ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 31 клетку (рис.2). Побейте его рекорд – закрасьте 33 клетки!

И.Акулич

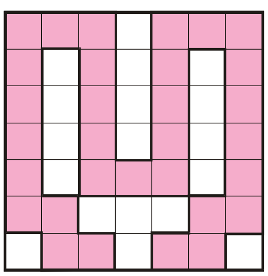

Рис. 2

5. Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алеше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотые и 3 серебряные. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алеше, но знает, какие монеты достались ему самому. Придумайте вопрос, на который Илья Муромец ответит «да», «нет» или «не знаю» и по ответу на который вы сможете понять, какие монеты ему достались.

А.Чеботарев

6. Айрат выписал подряд все числа месяца:

$$12345678910111213\ldots$$

и покрасил дни рождения троих своих друзей. Оказалось, что никакие два дня рождения не идут подряд и все непокрашенные промежутки состоят из одинакового количества цифр. Докажите, что первое число месяца покрашено.

И.Григорьева

7 класс

1. 2002 – год-палиндром, т.е. одинаково читается слева направо и справа налево. Предыдущий год-палиндром был 11 лет назад (1991). Какое максимальное число годов-непалиндромов идут подряд между 1000 и 9999 годами?

Г.Гальперин, Д.Григоренко

2. См. задачу 2 для 6 класса.

3. В написанном на доске примере на умножение хулиган исправил две цифры. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Восстановите исходный пример.

И.Ященко

4. При помощи пластмассового угольника с углами 30°, 60° и 90° постройте угол величиной 15°.

М.Панов

5. Художник-авангардист Змий Клеточкин покрасил несколько клеток доски размером 8×8, соблюдая правило: каждая следующая закрашиваемая клетка должна соседствовать по стороне с предыдущей закрашенной клеткой, но не должна – ни с одной другой ранее закрашенной клеткой. Ему удалось покрасить 36 клеток (рис.3). Побейте его рекорд – закрасьте 42 клетки!

И.Акулич

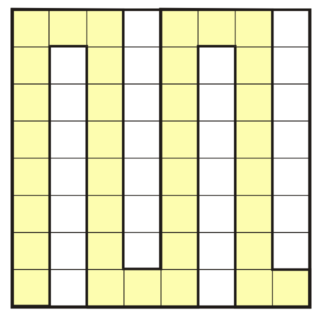

Рис. 3

6. В шахматном турнире на звание мастера спорта участвовали 12 человек. Каждый сыграл с каждым одну партию. За победу в партии дают одно очко, за ничью – пол-очка, а за поражение – ноль очков. По итогам турнира звание мастера спорта присвоили тем участникам, которые набрали более 70% от числа очков, получаемых в случае выигрыша всех партий. Могли ли стать мастерами спорта а) 7; б) 8 участников?

Е.Иванова

Избранные задачи для старших классов[1]

1. Дана окружность с диаметром AB. Другая окружность с центром в точке A пересекает отрезок AB в точке C, причем $AC < \frac{1}{2} AB$. Общая касательная двух окружностей касается первой окружности в точке D. Докажите, что прямая CD перпендикулярна AB. (8)

А.Заславский

2. Двое игроков по очереди выставляют на доску 65×65 по одной шашке. При этом ни в одной горизонтали или вертикали не должно быть больше двух шашек. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто выиграет при правильной игре? (8)

А.Бучин

3. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются в точке M. Докажите, что если угол AMB а) прямой; б) острый, то $AC + BC > 3AB$. (8)

И.Богданов

[1] *В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.*

4. В клетчатом прямоугольнике $m \times n$ каждая клетка может быть либо живой, либо мертвой. Каждую минуту все живые клетки умирают, а те мертвые, которые граничат с нечетным числом живых (по стороне), оживают. Укажите все пары (m, n), при которых жизнь в прямоугольнике может существовать вечно. (8)

А.Горбачев

5. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые направо, а остальные кругом. Всегда ли сержант может стать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом? (9)

А.Шаповалов

6. Пусть a, b, c – длины сторон треугольника. Докажите неравенство $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$. (9)

В.Сендеров

7. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и D соответственно. Отрезок DE пересекает стороны AB и BC в точках F и G. Пусть I – точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Докажите, что четырехугольник $BFIG$ – ромб. (9)

В.Жгун

8. Найдите все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющие уравнению $x^4 - 2y^2 = 1$. (9)

В.Сендеров

9. Остроугольный треугольник разрезали по прямой на две (не обязательно треугольные) части, затем одну из этих частей – опять на две части, и т.д. Через несколько шагов все части оказались треугольниками. Могут ли все они быть тупоугольными? (9)

Г.Гальперин

10. Тангенсы углов треугольника – натуральные числа. Чему они могут быть равны? (10, 11)

А.Заславский

11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F являются серединами сторон BC и CD соответственно. Отрезки AE, AF и EF делят четырехугольник на 4 треугольника, площади которых равны (в каком-то порядке) последовательным натуральным числам. Каково наибольшее возможное значение площади треугольника ABD? (10)

С.Шестаков

12. Все места в первом ряду кинотеатра заняты зрителями, купившими билеты в первый ряд, но при этом каждый сидит не на своем месте. Билетер может менять местами соседей, если оба сидят не на своих местах. Всегда ли он сможет рассадить всех на свои места? (10, 11)

А.Шаповалов

13. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в белый и черный цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества черных точек также были подобны друг другу (возможно, с различными коэффициентами подобия)? (10)

Г.Гальперин

14. Докажите, что на графике функции $y = x^3$ можно отметить такую точку A, а на графике функции $y = x^3 + |x| + 1$ – такую точку B, что расстояние AB не превысит $1/100$. (11)

А.Спивак, А.Хачатурян

15. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждое число, начиная с 2002-го, является делителем суммы всех предыдущих. Докажите, что все члены последовательности, начиная с некоторого, равны между собой. (11)

А.Шаповалов

16. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC; O_A, O_B, O_C – центры вписанных окружностей треугольников AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1 соответственно; T_A, T_B, T_C – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC, CA, AB соответственно. Докажите, что все стороны шестиугольника $T_AO_CT_BO_AT_CO_B$ равны. (11)

Л.Емельянов

Публикацию подготовили А.Спивак, Б.Френкин