Прямоугольник, вписанный в окружность

А.КАРЛЮЧЕНКО, Г.ФИЛИППОВСКИЙ

Четырехугольники, вписанные в окружность, хорошо изучены со времен Древней Греции, и о них достаточно много говорено. Поэтому, на первый взгляд, такая их частная разновидность, как вписанный в окружность прямоугольник, едва ли заслуживает серьезного внимания. Тем не менее более пристальное изучение свойств прямоугольника, вписанного в окружность, дарит много находок и неожиданностей, обнаруживает полезные зависимости и закономерности. В результате работы с данной конфигурацией сложилась подборка задач, которую мы выносим на суд читателей.

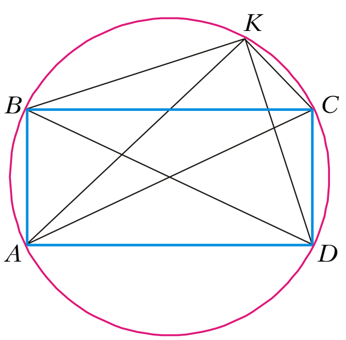

Рис. 1

Задача 1. *Докажите, что для любой точки K, лежащей на описанной около прямоугольника ABCD окружности, сумма* $AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2$ *есть величина постоянная. Найдите значение этой суммы, если радиус окружности равен R.*

Решение. Из прямоугольных треугольников BKD и AKC (рис.1) видно, что $BK^2 + DK^2 = BD^2$ и $AK^2 + CK^2 = AC^2$. Тогда

$$AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2 = BD^2 + AC^2 = 4R^2 + 4R^2 = 8R^2.$$

Но R постоянно, а значит, и требуемая сумма постоянна и равна $8R^2$.

Задача 2. *Через вершины вписанного в окружность прямоугольника площади S проведены касательные к этой окружности. Докажите, что образовавшийся четырехугольник – ромб. Докажите также, что площадь ромба не меньше 2S.*

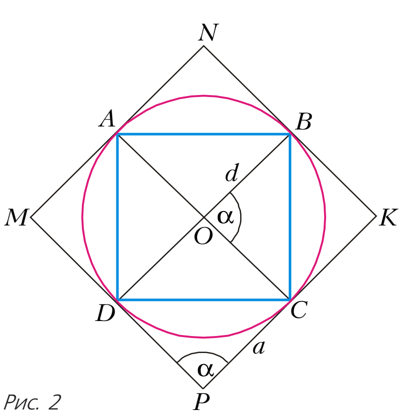

Рис. 2

Решение. Пусть после проведения касательных образовался четырехугольник $MNKP$ (рис.2).

Поскольку $MN \parallel KP$ ($MN \perp AC$ и $KP \perp AC$) и $MP \parallel KN$ ($MP \perp BD$ и $KN \perp BD$), то $MNKP$ – параллелограмм. Но параллелограмм с равными высотами ($AC = BD = 2R = d$) является ромбом.

Пусть сторона ромба $MN = a$ и $AC = BD = d$. Очевидно, что $a \geq d$. Тогда и $a^2 \sin\alpha \geq d^2 \sin\alpha$ ($\angle BOC = \angle MPK = \alpha$), или $S_{\text{ромба}} \geq 2S_{\text{прям}}$, что и требовалось доказать.

Задача 3. *Биссектрисы углов A и C вписанного прямоугольника ABCD пересекают окружность в точках E и F соответственно, O – центр окружности. Докажите, что точки E, O, F лежат на одной прямой (рис.3).*

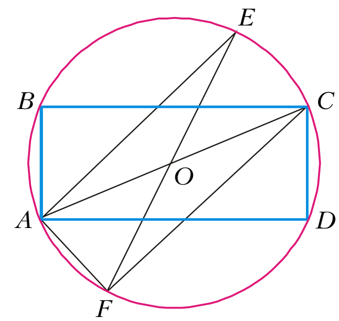

Рис. 3

Решение. Заметим, что $\angle FAD = \angle FCD = 45^\circ$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу), $\angle EAF = \angle EAD + \angle DAF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$, а это значит, что EF – диаметр, т.е. EF содержит точку O.

Задача 4. *Из точки K, лежащей на описанной около прямоугольника ABCD окружности, опустили перпендикуляры KM и KN на диагонали BD и AC соответственно. Докажите, что величина угла MKN, а также длина отрезка MN не зависят от положения точки K.*

Решение. Заметим, что $\alpha = 180^\circ - \beta$ (рис.4), но величина β не меняется, а значит, и $\alpha = \text{const}$. Далее, OK – диаметр окружности, описанной около четырехугольника $KMON$. Тогда по теореме синусов для треугольника KMN получаем $m = OK \sin\alpha$. Но OK – радиус большой окружности – величина постоянная. Поскольку и $\alpha = \text{const}$, то тем самым доказано постоянство отрезка m.

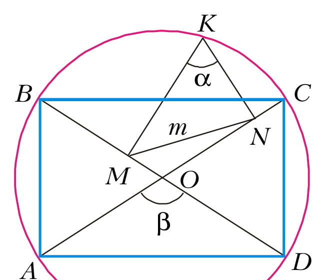

Рис. 4

Задача 5. *Из всех прямоугольников, вписанных в данную окружность, найдите тот, который имеет а) наибольшую площадь; б) наибольший периметр.*

Решение. Пусть S – площадь прямоугольника.

а) $S = \frac{1}{2} d^2 \sin\alpha \leq \frac{1}{2} d^2$ (так как $\sin\alpha \leq 1$) (рис.5), а равенство достигается, когда $\sin\alpha = 1$, т.е. при $\alpha = 90^\circ$. Значит, искомый прямоугольник – квадрат.

б) Из неравенства $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (среднее квадратичное не меньше среднего арифметического) имеем $a + b \leq \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} = 2R\sqrt{2}$ (см. рис.5), где $a + b$ – полупериметр прямоугольника $ABCD$. Знак равенства достигается при $a = b$. Следовательно, наибольший периметр также имеет квадрат.

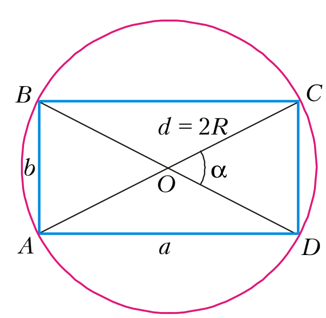

Рис. 5

Задача 6. *Восстановите вписанный в данную окружность прямоугольник по двум точкам M и N, принадлежащим смежным сторонам прямоугольника.*

Решение. Построим окружность с диаметром MN (рис.6). Пусть A – одна из точек пересечения построенной и данной окружностей. Тогда прямые AN и AM при пересечении с данной окружностью дадут, соответственно, точки B и D. Дальнейшее построение очевидно.

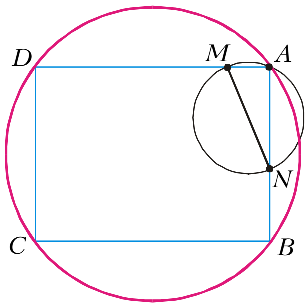

Рис. 6

Задача 7. *Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность, N – произвольная точка на меньшей дуге BC, точки K, T, E – основания перпендикуляров, опущенных из точки N на BD, AC, BC соответственно. Докажите, что точка E является точкой пересечения биссектрис (инцентром) в треугольнике NKT.*

Решение. Идея доказательства базируется на таком известном факте геометрии треугольника: $\angle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}$, где I – инцентр треугольника ABC (рис.7).

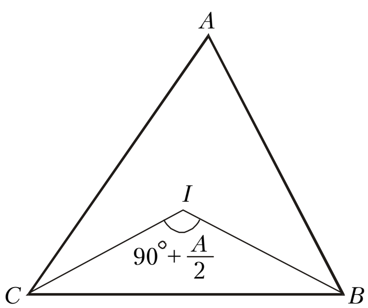

Рис. 7

Около $BNEK$ (рис.8) можно описать окружность ($\angle BEN = \angle BKN = 90^\circ$), тогда $\angle 1 = \angle 3$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу). Аналогично, около $NCTE$ можно описать окружность, тогда $\angle 2 = \angle 4$. Но $\angle 3 = \angle 4$ ($BO = CO$ и $\triangle BOC$ – равнобедренный), следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

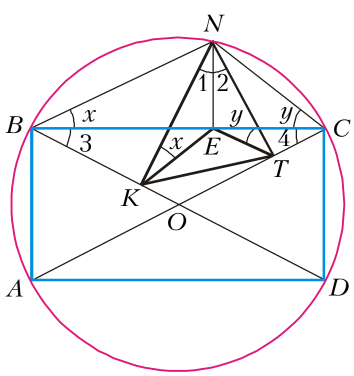

Рис. 8

Пусть $\angle KNT = \angle 1 + \angle 2 = \alpha$, тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \frac{\alpha}{2}$. Докажем, что $\angle KET = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. Поскольку при этом NE является биссектрисой в треугольнике KNT, то это и будет означать, что E – инцентр $\triangle KNT$.

Обозначим $\angle NCE = \angle NTE = y$ (так как $NCTE$ – вписанный четырехугольник). Аналогично, $\angle NBE = \angle NKE = x$ ($NBKE$ – вписанный четырехугольник), $\angle KEN = 180^\circ - (\angle 1 + x)$, $\angle TEN = 180^\circ - (\angle 2 + y)$. Тогда

$$\angle KET = 360^\circ - (\angle KEN + \angle TEN) = x + y + \alpha .$$

Но $x + y = \frac{1}{2} \cup BNC = \frac{1}{2}\angle BOC$. Поскольку $\angle BOC = 180^\circ - \alpha$ (из треугольника BOC), то $x + y = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Тогда $\angle KET = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} + \alpha = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. А это значит, что точка E – инцентр треугольника KNT.

Задача 8. *Пусть K – произвольная точка меньшей дуги AD описанной около прямоугольника $ABCD$ окружности (рис.9), K_1, K_2, K_3, K_4 – ее проекции на прямые AD, AB, CD, BC соответственно. Докажите, что K_1 – точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника $K_2K_3K_4$.*

Решение. Проведем прямую K_1K_2. Если мы докажем, что $\angle K_2TK_3 = x = 90^\circ$, то задача будет решена. Ясно, что $\angle 1 = \angle 2$ (AK_1KK_2 – вписанный четырехугольник), $\angle 2 = \angle 3$ (вписанные, опираются на одну дугу). Тогда $\angle 1 = \angle 3$. Поскольку $KO = K_3O$ – половины диагоналей прямоугольника KK_4CK_3, то $\angle 4 = \angle 5$. Но $\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$ (из $\triangle KCK_3$). Тогда и $\angle 1 + \angle 5 = 90^\circ$. Значит, в $\triangle K_2TK_3$ $x = 90^\circ$ и K_2T – высота, т.е. K_1 – ортоцентр $\triangle K_2K_3K_4$.

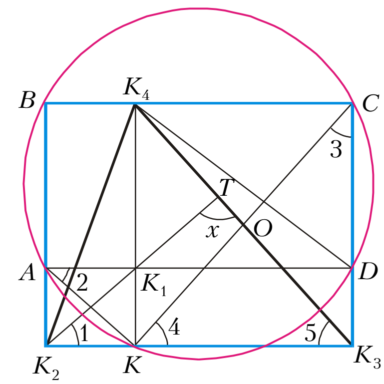

Рис. 9

Задача 9 (обобщение задачи 8). *Через произвольную точку K меньшей дуги AD проведена произвольная прямая, которая пересекает прямые AB и CD в точках K_2 и K_3 соответственно (рис.10). Через точку K проведена прямая перпендикулярно K_2K_3, которая пересекает AD и BC в точках K_1 и K_4 соответственно. Докажите, что K_1 – ортоцентр в треугольнике $K_2K_3K_4$.*

Решение. Докажем, что $\angle K_2TK_3 = x = 90^\circ$. Имеем $\angle 1 = \angle 2$ (AK_1KK_2 – вписанный четырехугольник), $\angle 2 = \angle 3$ (вписанные, опираются на одну дугу). Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$. Около KK_3CK_4 можно описать окружность, и тогда $\angle 4 = \angle 5$.

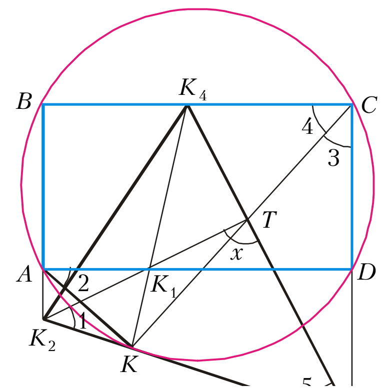

Рис. 10

Но $\angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$, а значит, $\angle 1 + \angle 5 = 90^\circ$. Тогда $x = 90^\circ$, и K_2K_1 – прямая, содержащая высоту, т.е. K_1 – ортоцентр.

Задача 10. *Дана точка A, две взаимно перпендикулярные прямые n и k, содержащие вершины B и D прямоугольника $ABCD$. Найдите геометрическое место вершин C всевозможных прямоугольников $ABCD$.*

Решение. Пусть данные прямые n и k пересекаются в точке E (рис.11). Тогда точки A, B, C, D, E лежат на одной окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$ ($\angle BED = \angle BCD = \angle BAD = 90^\circ$). Но AC – диаметр, следовательно, $\angle AEC = 90^\circ$. Таким образом, геометрическим местом вершин C всевозможных прямоугольников $ABCD$ будет прямая b, проведенная через точку E перпендикулярно AE.

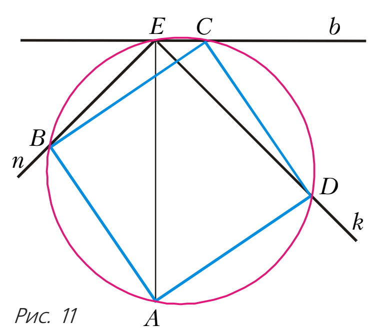

Рис. 11