становка клеток в прямоугольнике $1\times n$, то такая расстановка существует и в прямоугольнике $m\times n$ с любым m: нужно просто задать одну и ту же вечно живую расстановку во всех строках.

При $n = 2$ и $n \geq 4$ вечно живые расстановки $1\times n$ существуют: каждая из перечисленных ниже расстановок возвращается в исходное состояние за два шага (Ж – живая клетка, М – мертвая):

$n=2$	ЖМ $\leftrightarrow$ МЖ		
$n\geq 4$			
n четно	ЖММЖЖММЖ...	$\leftrightarrow$	МЖЖММЖЖМ...
n нечетно	ЖМММЖЖМММЖ...	$\leftrightarrow$	МЖМЖММЖЖМ...

В квадрате 3×3 также есть вечно живая расстановка периода 2:

$$\begin{matrix} Ж\ Ж\ М \\ М\ М\ М \\ М\ Ж\ Ж \end{matrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{matrix} М\ М\ Ж \\ Ж\ М\ Ж \\ Ж\ М\ М \end{matrix}$$

Случай 1×1 очевиден. Осталось рассмотреть прямоугольник 1×3 (случай 3×1 аналогичен). Можно считать (возможно, начав со второго шага), что первая клетка мертва. Тогда остается три варианта, в которых есть живая клетка. Эволюция варианта МЖЖ включает в себя и МЖМ:

$$\text{МЖЖ} \to \text{ЖММ} \to \text{МЖМ} \to \text{ЖМЖ} \to \text{МММ},$$

а вариант ММЖ симметричен варианту ЖММ, который также входит в этот пример.

5. Всегда. *Решение.* Пусть m обозначает число новобранцев, стоящих лицом к сержанту слева от него, а n – справа. Вначале пусть сержант станет на левый край шеренги. Тогда $m = 0$. Если $n = 0$, то задача решена. Если же $n > 0$, то пусть сержант передвигается по шеренге слева направо. Если он проходит человека, стоявшего к нему спиной, то m увеличивается на 1, а n не изменяется. Если сержант проходит человека, стоявшего к нему лицом, то m не изменяется, а n уменьшается на 1. Если новобранец стоял боком, то оба числа остаются прежними. Вначале разность $m - n$ отрицательна. В конце (когда сержант дойдет до правого края) $n = 0$ и потому $m - n \geq 0$. Так как число $m - n$ целое и может меняться за один шаг только на 1, то в какой-то момент оно равно нулю, что и требовалось.

6. Используя неравенство треугольника $a + b > c$ и тот факт, что $a^2 - ab + b^2 > 0$, получаем

$$a^3+b^3+3abc=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)+3abc>$$
$$> c\left(a^2-ab+b^2\right)+3abc = c(a+b)^2 > c\cdot c^2 = c^3.$$

7. Отразим $\triangle DBE$ относительно прямой DE. По свойству вписанных углов $\angle AED=\angle ACD=\angle BCD=\angle BED$, поэтому прямая AE перейдет в прямую BE. Аналогично, прямая CD перейдет в прямую BD. Значит, точка I перейдет в точку B. Поэтому $BF = IF$, $BG = IG$ и $BI \perp FG$. Но луч BI – биссектриса угла FBG, поэтому $\triangle FBG$ равнобедренный, т.е. $BF = BG$. Таким образом, все стороны четырехугольника $BFIG$ равны, что и требовалось.

8. $x = \pm 1$, $y = 0$. *Решение*. Знаки x и y можно выбирать произвольно, поэтому достаточно найти неотрицательные решения. Перепишем уравнение в виде

$$\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=2y^2.$$

Пусть $y > 0$. Каждый простой множитель входит в разложение числа y^2 четное число раз. Если он не равен 2, то входит в разложение ровно одного из чисел x^2-1, x^2+1. Оба эти числа четны (так как четна правая часть уравнения). При этом в разложении x^2+1 содержится одна двойка (x^2+1 ни при каком натуральном x не делится на 4). Как следствие, в разложении x^2-1 содержится четное число двоек. Таким образом, все простые множители входят в это разложение четное число раз, т.е. x^2-1 является точным квадратом. Но если два точных квадрата отличаются на 1, то меньший из них равен 0. Значит, в действительности $x = \pm 1$ и $y = 0$.

9. Не могут. *Решение.* Докажем, что при каждом разрезе число нетупых углов увеличивается не менее чем на 2. Действительно, если конец разреза лежит на стороне какого-то из имеющихся многоугольников, то здесь образуется не менее одного нетупого угла. Если же это вершина многоугольника, то угол при ней разбивается на два угла, сумма которых меньше 180°. Значит, тем более один из них нетупой. Если угол многоугольника был нетупым, то оба образовавшихся угла нетупые. Таким образом, при каждом разрезе число нетупых углов увеличивается.

Так как исходный треугольник остроугольный, то вначале число нетупых углов равно трем. После k разрезов оно не меньше чем $2k + 3$. Если все $k + 1$ получившиеся части – тупоугольные треугольники, то число нетупых углов равно $3(k + 1) - (k + 1) = 2k + 2 < 2k + 3$. Получено искомое противоречие.

10. Тангенсы углов треугольника равны 1, 2, 3. *Решение.* Обозначим углы треугольника в порядке неубывания α, β, γ. Тогда $0<\alpha\leq\pi/3$, поэтому $0<\operatorname{tg}\alpha\leq\sqrt{3}$. Так как $\operatorname{tg}\alpha$ – натуральное число, то $\operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$. Тогда $\beta+\gamma=\dfrac{3\pi}{4}$, откуда

$$-1=\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma},\quad (\operatorname{tg}\beta-1)(\operatorname{tg}\gamma-1)=2.$$

Ясно, что одна скобка равна 1, а другая 2, откуда $\operatorname{tg}\beta=2$, $\operatorname{tg}\gamma=3$ (поскольку $\beta\leq\gamma$).

11. 6. *Решение*. Пусть площади треугольников равны n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$. Тогда площадь четырехугольника составляет $4n + 6$. Площадь треугольника BCD равна учетверенной площади треугольника ECF. Значит,

$$S_{ABD}=S_{ABCD}-S_{BCD}\leq(4n+6)-4n=6.$$

Осталось показать, что значение 6 возможно. Примером служит равнобедренная трапеция с основаниями $AD = 6$, $BC = 4$ и высотой 2.

12. Всегда.

13. Можно. *Решение*. Впишем круг в квадрат и покрасим в черный цвет точки квадрата, лежащие вне круга. В полученный круг впишем квадрат со сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата. Покрасим в белый цвет точки круга, лежащие вне вписанного квадрата. Далее действуем аналогично. Граничные точки фигуры всегда считаем принадлежащими ей. Таким образом, граница каждого квадрата покрашена черным, кроме четырех точек касания вписанного круга, а граница каждого круга – белым, кроме четырех вершин вписанного квадрата.

14. Положим $t = 100$, $c=t^3+t+1$, $r=\sqrt[3]{c}-t>0$. Точка A с координатами $(t+r,c)$ лежит на графике функции $y=x^3$, а точка B с координатами (t, c) – на графике функции $y=x^3+|x|+1$. Расстояние AB равно r. Но из равенства $(t+r)^3=c=t^3+t+1$ следует, что $3t^2r+3tr^2+r^3=t+1$, $3t^2r<t+1$, $r<\dfrac{t+1}{3t^2}<\dfrac{1}{100}$.

15. Пусть $\{a_n\}$ – данная последовательность, S_n – сумма первых n ее членов, $k_n=S_{n-1}/a_n$. Так как $a_{n+1}>a_n$, то

$$k_{n+1}=\frac{S_n}{a_{n+1}}>\frac{S_{n-1}+a_n}{a_n}=k_n+1.$$

По условию k_n и k_{n+1} целые, поэтому $k_{n+1}\leq k_n$. Значит, с некоторого номера N частные равны константе k. Но тогда при $n\geq N$ имеем $a_n=S_{n-1}/k$, откуда $S_n=\dfrac{k+1}{k}S_{n-1}$ и, сле-