Сумма 1957 + y делится на 9 при y = 5. (И ни при каком другом, поскольку, как вы помните, $0 \le y \le 9$). Значит, x = 1962 : 9 = 218.

4. См. рис.8. (При помощи компьютера проверено, что больше 33 клеток закрасить нельзя.)

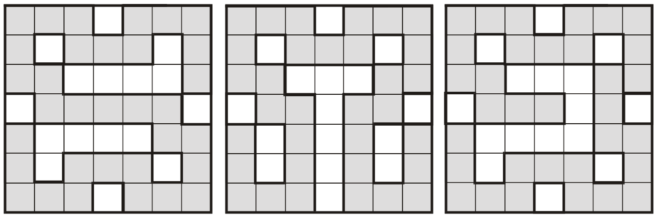

Рис. 8

5. Вопрос может звучать так: «Верно ли, что и Алеше Поповичу, и Добрыне Никитичу досталось хотя бы по одной серебряной монете?» Если ответ утвердительный, то обе монеты Ильи Муромца – золотые. Если отрицательный, то Илье достались две серебряные монеты. А если Илья не сможет ответить ни «да», ни «нет», то он получил за службу золотую и серебряную монеты.

Можно было задать и другие вопросы, например:

– Верно ли, что хотя бы одному из двух других богатырей достались две серебряные монеты?

– У тебя больше золотых монет, чем у Алеши Поповича?

– Если я заберу одну из твоих монет и дам вместо нее золотую, то станет ли у тебя больше золота? (Заметьте, что в этом вопросе не упомянуты монеты, доставшиеся двум другим богатырям!)

6. Допустим, число 1 не покрашено. Если наименьшее из покрашенных чисел двузначное, то первый из непокрашенных промежутков состоит из нечетного числа цифр, а последний – из четного числа цифр. Если же наименьшее из покрашенных чисел однозначное, то первый из непокрашенных промежутков состоит не более чем из 8 цифр. Но это слишком мало: не более чем 7 покрашенных цифр вместе с не более чем $8 \cdot 4 = 32$ непокрашенными дают не более чем 39 цифр, а даже самый короткий месяц (февраль) дает 47 цифр. В обоих случаях получили противоречие. Значит, число 1 должно быть покрашено.

7 класс

1. 109. *Решение.* Пусть год-палиндром $\overline{abba}$. Если b = 9, то через 11 лет наступит год-палиндром $\overline{(a+1)00(a+1)}$. Если b < 9, то следующий год-палиндром $\overline{a(b+1)(b+1)a}$ наступит через 110 лет. Поэтому наибольшее число идущих подряд годов-непалиндромов равно 109.

3. $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 = 2240$ или $4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2240$. *Решение.* Поскольку в отредактированном хулиганом примере три сомножителя четные, то и в исходном хотя бы один сомножитель четный. Поэтому произведение было четным и цифра 7 написана хулиганом. Следовательно, слева от знака равенства изменена не более чем одна цифра. Значит, в исходном равенстве слева была хотя бы одна пятерка и, будучи четным числом, произведение оканчивалось на цифру 0.

Вычислим произведение $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 1600$. Поскольку числа 1600 и 2240 отличаются более чем в одном разряде, то один из сомножителей был изменен. Поскольку 2240 не делится на $400 = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5$, то одна из пятерок написана хулиганом, а три четверки и другая пятерка – настоящие. Осталось заметить, что $2240 : \left(4^3 \cdot 5\right) = 7$.

4. Приведем два построения (есть и много других).

Первый способ. На рисунке 9 луч AD – биссектриса угла BAB'.

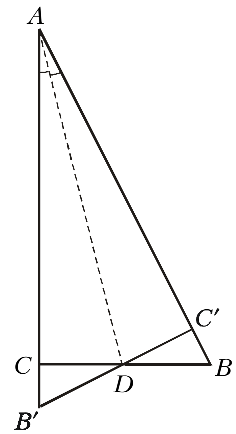

Рис. 9

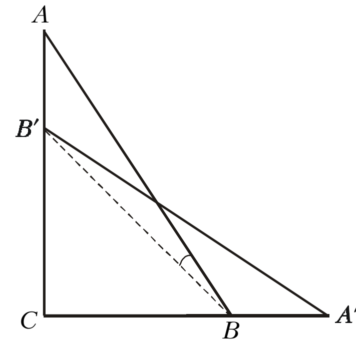

Рис. 10

Второй способ. На рисунке 10

$$\angle ABB' = \angle ABC - \angle B'BC = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ.$$

5. См. рис.11. (При помощи компьютера проверено, что больше 42 клеток закрасить нельзя.)

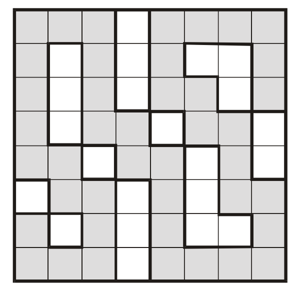

Рис. 11

6. а) Да; б) нет. Поскольку 70% от 11 – это 7,7, то для получения звания надо набрать не менее 8 очков.

а) Семеро участников турнира могли сыграть все партии друг с другом вничью (набрав по 3 очка каждый) и выиграть все партии у остальных 5 шахматистов (набрав еще по 5 очков). б) Если каждый из 8 шахматистов набрал не менее чем по 8 очков, то они вместе набрали не менее $8 \cdot 8 = 64$ очков. Всего в турнире сыграно $12 \cdot 11/2 = 66$ партий. Значит, на долю остальных четверых шахматистов останется не более 66 – 64 = 2 очков. Но между собой они сыграли 6 партий – а значит, должны были в сумме набрать не менее 6 очков.

Избранные задачи для старших классов

1. Пусть O – центр первой окружности, E – точка касания второй окружности с общей касательной. Так как $OA = OD$, то $\angle ODA = \angle OAD$. Поскольку $OD \parallel AE$, то $\angle DAE = \angle ODA$, откуда $\triangle DEA = \triangle DCA$ по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle DCA = \angle DEA = 90^\circ$, что и требовалось.

2. Выигрывает второй. *Решение*. Заметим, что от перестановки горизонталей и вертикалей ничего не меняется. Пусть первый игрок сделал первый ход. Тогда второй мысленно переставит горизонтали и вертикали так, чтобы поставленная шашка оказалась в средней вертикали, но не в центре доски. Далее он делает ходы симметрично ходам первого игрока относительно центра доски. Вторая шашка тоже окажется в средней вертикали, первый игрок не сможет занять центр доски, поэтому второй всегда сможет сделать ход.

3. а), б). Проведем в треугольнике AMB медианы AF и BG, и пусть N – точка их пересечения. Так как $MB = 2ME$, то $MF = ME$. Если $AM \perp BE$, то $AE = AF$. Если же $\angle AMF < 90^\circ$, то $AF < AE$. Поэтому $AN = \frac{2}{3}AF \le \frac{2}{3}AE = \frac{1}{3}AC$. Аналогично, $BN \le \frac{1}{3}BC$. С учетом неравенства треугольника $AC + BC \ge 3(AN + NB) > 3AB$.

4. Любые пары (m, n), кроме пар (1, 1), (1, 3) и (3, 1). *Решение.* Если для некоторого n существует вечно живая рас-