б) Воспользуемся формулой $\left(a\sqrt{3}+b\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)^2 = (5a\pm 4b)\sqrt{3}+(5b\pm 6a)\sqrt{2}$. Пусть a, b – натуральные числа и $3a^2-2b^2=1$. Тогда $3(5a-4b)^2-2(5b-6a)^2=1$. Если $5a-4b\le 0$, то $3a^2-2b^2\le 3\left(\frac{4}{5}b\right)^2-2b^2=-\frac{2}{25}b^2<0$. Значит, $5a-4b>0$. Если $5b-6a\le 0$, то $3a^2-2b^2\ge 3\left(\frac{5}{6}b\right)^2-2b^2=\frac{1}{12}b^2$. Осталось проверить значения $b=1, 2, 3$. Подходит только $b=1$, которому соответствует $a=1$. Дальнейшие рассуждения аналогичны доказательствам теорем 2, 3, 5, 9.

36. а) Вспомнив пункт б) упражнения 20, видим: годятся $a=\varphi_{2n-1}$ и $b=\varphi_{2n+1}$, где n – натуральное число. в) Если $a=b$, то $c=2+\frac{1}{a^2}$, так что $a=1$ и $c=3$. Пусть $c\ne 3$ и $a<b$, причем b – наименьшее возможное. Положим $A=ca-b$ и $B=a$. Очевидно,

$$A=ca-b=\frac{a^2+1}{b}<a+1.$$

Значит,

$$0<A\le a=B<b$$

и

$$A^2+B^2+1=A^2+a^2+1=A^2+Ab=A(A+b)=ABc.$$

Получили противоречие: число b оказалось не самым маленьким из возможных!

д) Пусть $x^2-\left(n^2-4\right)y^2=-4$, где x, y – натуральные числа. Число x той же четности, что и число ny. Значит, число $a=(x+ny)/2$ натуральное. Как легко убедиться, $a^2+y^2+1=ayn$.

37. а) Случай $a=b$ невозможен: число $\frac{2a^2}{a^2-1}=2+\frac{2}{a^2-1}$ не может быть целым ни при каком натуральном a.

Предположим, что при некотором натуральном t уравнение

$$x^2-txy+y^2+t=0 \qquad (*)$$

имеет решения в натуральных числах x, y. Рассмотрим наименьшее натуральное $x=a$, для которого существует натуральное $y=b<a$, удовлетворяющее равенству $(*)$. При фиксированных t и b уравнение $x^2-txb+b^2+t=0$ – квадратное относительно x. Если оно имеет натуральный корень a, то по теореме Виета оно имеет и целый корень $A=tb-a$. Если $A\le 0$, то

$$a^2-tab+b^2+t=a(a-tb)+b^2+t>0,$$

что неверно. Значит, $A\ge a$. Если $A=a$, то дискриминант равен нулю:

$$(tb)^2-4\left(b^2+t\right)=0,$$

откуда $4t=\left(t^2-4\right)b^2\ge t^2-4$, так что $t\le 4$; но при $t=1, 2, 3, 4$ равенство $4t=\left(t^2-4\right)b^2$ не имеет места.

Итак, $A>a$. По теореме Виета, $aA=b^2+t$ и $a+A=tb$. Поэтому

$$b^2+t-tb=aA-a-A=(a-1)(A-1)-1\ge$$
$$\ge b(b+1)-1=b^2+b-1,$$

откуда

$$t(1-b)\ge b-1.$$

Это возможно лишь при $b=1$, причем все неравенства должны обращаться в равенства, т.е. $a=2$, $A=3$, $t=5$.

б) Два решения найти легко: $(x;\ y)=(1;\ 2)$ или $(1;\ 3)$. Из каждого решения $(x;\ y)$, где $x<y$, можно получить новое решение $(y;\ 5y-x)$. Действительно, $(5y-x)^2-5(5y-x)y+y^2=x^2-5xy+y^2$. При этом $5y-x>4y>y$. Таким образом, любые два соседних члена любой из последовательностей

1, 2, 9, 43, 206, 987,…,

1, 3, 14, 67, 321, 1538,…,

где каждый член получается из двух предыдущих x, y по формуле $5y-x$, дают решение интересующего нас уравнения. На самом деле мы нашли все решения в натуральных числах! Докажем это. Пусть $0<X<Y$ и $X^2-5XY+Y^2+5=0$. Рассмотрим преобразование $(X;Y)\to(x;y)$, где $x=5X-Y$ и $y=X$. Если $x<X$, то $\min(x,y)<\min(X,Y)$, так что удалось получить «меньшее» решение в натуральных числах. Если же $5X-Y\ge X$, то $5=(5X-Y)Y-X^2\ge XY-X^2=X(Y-X)\ge X$. Перебрав значения $X=1, 2, 3, 4, 5$, находим $(X;\ Y)=(1;\ 2)$ или $(1;\ 3)$.

39. Обозначим для краткости $\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ и $\beta=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Тогда

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n-2=\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2(\alpha\beta)^n=\left(\alpha^n-\beta^n\right)^2.$$

Осталось доказать, что число $a_n=\alpha^n-\beta^n$ является целым, если n четно, и в $\sqrt{5}$ раз больше целого числа, если n нечетно. Это можно сделать по индукции, проверив равенства $a_1=1$ и $a_2=\sqrt{5}$ и рекуррентную формулу

$$a_{n+2}=\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}=$$
$$=\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)(\alpha+\beta)-\alpha\beta\left(\alpha^n-\beta^n\right)=a_{n+1}\sqrt{5}-a_n.$$

40. а) *Первый способ.* Пусть $\alpha=2+\sqrt{3}$ и $\beta=3\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$. Тогда числа $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^m+\left(2-\sqrt{3}\right)^m$ и $b=3^n\left(2+\sqrt{3}\right)^n+3^n\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ целые, причем a не делится на 3, а b – делится. Очевидно, $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^m\right]=a-1$ и, поскольку $3\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{3}{2+\sqrt{3}}<1$, то $\left[3^n\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]=b-1$.

Второй способ. Числа $a=\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^m+\left(2-\sqrt{3}\right)^m\right)/2$ и $b=\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^n+\left(1-\sqrt{2}\right)^n\right)/2$ – натуральные, причем для некоторых натуральных c и d имеем $a^2-3c^2=1$ и $b^2-2d^2=(-1)^n$. Если $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^m\right]=\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^n\right]$, то в случае нечетного n имеем $2a-1=2b$, что невозможно, а в случае четного n имеем $2a-1=2b-1$, так что $a=b$, откуда $3c^2=2d^2$, что невозможно для натуральных чисел c и d.

Третий способ предложил Г.Челноков. В статье «Пентиум» хорошо, а ум лучше» («Квант» №4 за 1999 год) доказано следующее утверждение: если α и β – положительные иррациональные числа и $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$, то для любых натуральных чисел m и n целые части чисел $n\alpha$ и $m\beta$ различны. В таком случае числа 10^α и 10^β имеют разное количество цифр, так что достаточно доказать существование таких положительных иррациональных α и β, что $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ и числа 10^α и 10^β иррациональны. Это легко сделать, воспользовавшись несчетностью континуума.

Четвертый способ предложил И.Богданов. Изложим решение, естественное для студента, изучившего теорему о стягивающихся отрезках и счетность множества рациональных чи-