Уравнения Пелля

21. а) Одно решение очевидно: $4^2 - 2 \cdot 1^2 = 14$. Если $x^2 - 2y^2 = 14$, то $(3x+4y)^2 - 2(2x+3y)^2 = 14$, так что из всякого решения $(x; y)$ можно получить еще одно решение $(3x+4y; 2x+3y)$. При положительных x и y числа $3x + 4y$ и $2x + 3y$ тоже положительны и $3x + 4y > x$ (да и $2x + 3y > y$).

б) Воспользуйтесь тем, что $23 = 5^2 - 2 \cdot 1^2$.

в) *Первый способ.* Пусть $x^2 - 2y^2 = 3$. Если хотя бы одно из чисел x и y делится на 3, то другое тоже должно делиться на 3, и $x^2 - 2y^2$ делится на 9. Если же ни x, ни y не делятся на 3, то x^2 и y^2 дают остаток 1 при делении на 3, и левая часть уравнения не делится на 3.

Пусть теперь $x^2 - 2y^2 = 2005$. Если хотя бы одно из чисел x, y делится на 5, то второе тоже делится на 5, и тогда левая часть делится на 25, а 2005 на 25 не делится. В противном случае левая часть на 5 не делится, поскольку тогда каждое из чисел x^2 и y^2 при делении на 5 дает остаток 1 или 4, а ни одно из чисел $1 - 2 \cdot 1$, $1 - 2 \cdot 4$, $4 - 2 \cdot 1$ и $4 - 2 \cdot 4$ не делится на 5.

Второй способ. Если число $x^2 - 2y^2$ нечетно, то x нечетно, так что $x^2 \equiv 1 \pmod 8$ и, следовательно, $x^2 - 2y^2 \equiv 1$ или $-1 \pmod 8$.

22. а) $11^2 = (-4)^2 + (-3)^2 + \ldots + 5^2 + 6^2$. Уравнение $(x-5)^2 + (x-4)^2 + \ldots + (x+4)^2 + (x+5)^2 = y^2$ после раскрытия скобок и приведения подобных принимает вид $11x^2 + 110 = y^2$. Замена $y = 11z$ и сокращение на 11 дают $x^2 + 10 = 11z^2$. Наименьшее по величине натуральное z, удовлетворяющее этому уравнению, равно 1. При этом $y = 11$.

б) Поскольку $x^2 - 1 = 11z^2 - 11$, то $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ делится на 11. Значит, $x = 11t \pm 1$. Значения x = 1, 10, 12, 21 не подходят, а при x = 23 имеем z = 7, т.е. y = 77.

в) Поскольку $1^2 - 11 \cdot 1^2 = -10$ и $10^2 - 11 \cdot 3^2 = 1$, то уравнение $x^2 - 11z^2 = -10$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

23. Случай $b = 0$ тривиален: достаточно взять $u = v = 0$ и $w \neq 0$.

Пусть $b \neq 0$. Если $x^2 + ay^2 \neq 0$, домножим обе части равенства $x^2 + ay^2 = -b(z^2 + at^2)$ на $x^2 + ay^2$ и воспользуемся формулой

$$\left(x^2 + ay^2\right)^2 = -b\left((xz - ayt)^2 + a(xt + yz)^2\right).$$

Следовательно,

$$-b = \left(\frac{b(xz - ayt)}{x^2 + ay^2}\right) + a\left(\frac{b(xt + yz)}{x^2 + ay^2}\right)^2.$$

Значит, можно взять $u = \dfrac{b(xz - ayt)}{x^2 + ay^2}$, $v = \dfrac{b(xt + yz)}{x^2 + ay^2}$ и $w = 1$.

Если же $x^2 + ay^2 = 0$, то $z^2 + at^2 = 0$ и можно в случае $x^2 + y^2 \neq 0$ взять $u = x$, $v = y$, $w = 0$. А в случае $x = y = 0$ можно взять $u = z$, $v = t$ и $w = 0$.

24. Можно считать, что $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Рассмотрим натуральные числа a и b, для которых $a^2 - db^2 = 1$. Тогда числа $x_1 = ax + dby$ и $y_1 = bx + ay$ натуральные. Формулы $x_{n+1} = ax_n + dby_n$ и $y_{n+1} = bx_n + ay_n$ дают бесконечную последовательность решений.

25. а) При любом натуральном a, не являющемся квадратом натурального числа, а также при $a = 0$. б) При $a = 0$ число d должно быть квадратом, а при $a \neq 0$ число d должно не быть квадратом.

26. б) Поскольку $n^2 - (n^2 + 1) = -1$, то

$$\left(n - \sqrt{n^2+1}\right)^2 \left(n + \sqrt{n^2+1}\right)^2 = (-1)^2 = 1,$$

откуда $\left(2n^2 + 1 - 2n\sqrt{n^2+1}\right)\left(2n^2 + 1 + 2n\sqrt{n^2+1}\right) = 1$. Мы нашли решение $(x; y) = (2n^2 + 1; 2n)$ уравнения Пелля в натуральных числах. А если есть одно, есть и бесконечно много.

в) *Указание.* $(n^2+1)^2 - (n^2+2)n^2 = 1$.

г) *Указание.* $(n^2-1)^2 - (n^2-2)n^2 = 1$.

27. Воспользуйтесь предыдущим упражнением и тем, что

а) $(a^2+1)(a^2+1) = (a^2+1)^2$;

б) $(a^2-1)(a^2-1) = (a^2-1)^2$ (случай a = 1 разберите отдельно; впрочем, он очевиден);

в) $(a^2+1)(0^2+1) = a^2 + 1$;

г) $(a^2-1)(1^2-1) = 1^2 - 1$ (случай a = 1 требует отдельного рассмотрения);

д) $(a^2+1)(1^2-1) = 1^2 - 1$;

е) $(a^2-1)(0^2+1) = a^2 - 1$ (и опять случай a = 1 требует отдельного рассмотрения).

28. а) Если y четно, то при делении на 4 правая часть уравнения дает остаток 3, а левая 1. Если y нечетно, то правая часть делится на 8; поскольку ни $a^2 + 1$, ни $x^2 + 1$ не делятся на 4, то левая часть на 8 не делится. в) Если x нечетно, то $x^2 - 1$ делится на 4 (и даже на 8); с другой стороны, $y^2 + 1$ не делится на 4. Если x четно, то число $x^2 - 1$ имеет хотя бы один простой делитель вида $p = 4n - 1$. Возведя обе части сравнения $y^2 \equiv -1 \pmod p$ в степень $2n - 1$, получим $y^{p-1} = \left(y^2\right)^{2n-1} = -1 \pmod p$. Последнее сравнение противоречит малой теореме Ферма (о которой можно прочитать в «Кванте» №1, 3 и 4 за 2000 год).

29. а) Если $(x; y; z; t) = (2 + a; 2 - a; b - 1; -b - 1)$, то $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = (2+a)^3 + (2-a)^3 + (b-1)^3 + (-b-1)^3 = 14 + 12a^2 - 6b^2$. Приходим к уравнению $12a^2 - 6b^2 = -12$, т.е. $b^2 - 2a^2 = 2$.

б) Пусть x = 1. Замена $Y = y + 1$ и $Z = z + 1$ сводит задачу к уравнению $Z^2 - 3Y^2 = -2$, которое имеет бесконечно много решений.

в) Рассмотрите числа 1, 2 и $y^2 + 1$, где y – натуральное число, для которого существует такое натуральное число x, что $x^2 - 2y^2 = 1$.

г) Полагая x = 1, получаем уравнение $(a^2+1)(v^2+1) = u^2 + 1$, т.е. $u^2 - (a^2+1)v^2 = a^2$. Это уравнение имеет целочисленное решение $(u; v) = (a; 0)$. Поэтому оно имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

30. а) Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел m и n, для которых $n^2 + 1 = 5m^2$ и $m > 5$. При этом $m = \sqrt{(n^2+1)/5} < n/2$ и $n!$ делится на $n^2 + 1$, так как при $m > 5$ в произведении $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)n$ есть множители 5, m и $2m$. б) В силу равенства $n^2 - (n^2+1) \cdot 1 = -1$ существуют сколь угодно большие натуральные числа d, для которых уравнение $x^2 - dy^2 = -1$ имеет хотя бы одно решение в натуральных числах – а следовательно, и бесконечно много.

Есть и другие способы доказательства. Например, можно воспользоваться разложением многочлена $x^{105} + 1$ на неприводимые многочлены с целыми коэффициентами (подробности – в